nuclear fusion
fusion nucléaire
ядерный синтез
fusión nuclear

INTERNATIONAL ATOMIC ENERGY AGENCY - VIENNA 196
AGENCE INTERNATIONALE DE L'ENERGIE ATOMIQUE - VIENNE 196
МЕЖДУНАРОДНОЕ АГЕНТСТВО ПО АТОМНОЙ ЭНЕРГИИ - ВЕНА 1961
ORGANISMO INTERNACIONAL DE ENERGIA ATOMICA - VIENA 196

VOLUME - TOM - VOLUMEN 1 • NUMBER - ВЫПУСК - NUMERO

The following States are Members of the International Atomic Energy Agency

AFGHANISTAN
ALBANIA
ARGENTINIA
AUSTRALIA
AUSTRIA

BELGIUM
BRAZIL
BULGARIA
BURMA
BYELORUSSIAN SOVIET SOCIALIST REPUBLIC

CAMBODIA
CANADA
CEYLON
CHINA
CHILE
CUBA
COLOMBIA
CONGO (LÉOPOLDVILLE)
CZECHOSLOVAK SOCIALIST REPUBLIC

DENMARK
DOMINICAN REPUBLIC

ECUADOR
EL SALVADOR
ETHIOPIA

FINLAND
FRANCE
FEDERAL REPUBLIC OF GERMANY

GHANA
GREECE
GUATEMALA

HAITI
HOLY SEE
HONDURAS
HUNGARY

ICELAND
INDIA
INDONESIA
IRAN
IRAQ
ISRAEL
ITALY

JAPAN

REPUBLIC OF KOREA

LEBANON
LUXEMBOURG

MALI
MEXICO
MONACO
MOROCCO

NETHERLANDS
NEW ZEALAND
NICARAGUA
NORWAY

PAKISTAN
PARAGUAY
PERU
PHILIPPINES
POLAND
PORTUGAL

ROMANIA

SALVADOR
SENEGAL
SOUTH AFRICA
SPAIN
SUDAN
SWEDEN
SWITZERLAND

THAILAND
TUNISIA
TURKEY

UKRAINIAN SOVIET SOCIALIST REPUBLIC
UNION OF SOVIET SOCIALIST REPUBLICS
UNITED ARAB REPUBLIC
UNITED KINGDOM OF GREAT BRITAIN AND NORTHERN IRELAND
UNITED STATES OF AMERICA

VENEZUELA
VIET-NAM

YUGOSLAVIA

NUCLEAR FUSION, *Journal of Plasma Physics and Thermonuclear Fusion*,
is a quarterly international scientific journal published by the International Atomic Energy Agency. The journal contains reports of original work and review articles concerning plasma physics and controlled thermonuclear fusion research. For information on manuscript preparation and similar matters see inside of back cover. Subscription rates are printed on the outside of the back cover. Inquiries should be addressed to "The Editor, NUCLEAR FUSION, International Atomic Energy Agency, Vienna I, Austria".

FUSION NUCLEAIRE, *Journal de physique des plasmas et fusion thermonucléaire*,
est une publication scientifique internationale éditée tous les trimestres par l'Agence internationale de l'énergie atomique. Cette revue contient des rapports sur des travaux de recherche inédits et des études générales concernant la physique des plasmas et la recherche en matière de fusion thermonucléaire contrôlée. Pour tous renseignements sur la préparation des manuscrits et autres questions analogues, consulter la face interne du feuillet de couverture, à la fin de la revue. Les tarifs d'abonnement figurent au verso. Les demandes de renseignements doivent être adressées au «Rédacteur en chef, FUSION NUCLEAIRE, Agence internationale de l'énergie atomique, Vienne I, Autriche».

ЯДЕРНЫЙ СИНТЕЗ, *Журнал по физике плазмы и термоядерному синтезу*,
— ежеквартальный международный научный журнал, издаваемый Международным Агентством по атомной энергии. В журнале публикуются отчеты об оригинальных работах и обзорные статьи, посвященные вопросам исследований в области физики плазмы и управляемого термоядерного синтеза. Информация о подготовке рукописи и по аналогичным вопросам приведена на обороте обложки. Подписная цена указана на внешней стороне обложки. За справками обращаться по адресу: «Редактору журнала ЯДЕРНЫЙ СИНТЕЗ, Международное Агентство по атомной энергии, Вена I, Австрия».

FUSION NUCLEAR, *Revista de física del plasma y fusión termonuclear*,
es una publicación científica internacional editada trimestralmente por el Organismo Internacional de Energía Atómica. La revista contiene informes sobre trabajos originales y reseñas de investigaciones sobre física del plasma y fusión termonuclear controlada. En la contracubierta interna figuran normas para la preparación de los manuscritos, etc. y en la externa se indican los precios de suscripción. La correspondencia debe dirigirse al «Redactor de la revista FUSION NUCLEAR, Organismo Internacional de Energía Atómica, Viena I, Austria».

Permission to reproduce or translate the information contained in this publication may be obtained by writing to the International Atomic Energy Agency, Kärntner Ring 11, Vienna, Austria

© IAEA, 1962

Published by the International Atomic Energy Agency · Printed by Globus, Druck- und Verlagsanstalt, Vienna

NUCLEAR FUSION
FUSION NUCLEAIRE
ЯДЕРНЫЙ СИНТЕЗ
FUSION NUCLEAR

VOLUME 1 NO. 4
DECEMBER – 1961 – ДЕКАБРЬ
ТОМ 1 ВЫП. 4

CONTENTS — SOMMAIRE — СОДЕРЖАНИЕ — INDICE

B. Kurşunoğlu: Relativistic plasma 213
J. Katzenstein: Acceleration of plasma by traveling electromagnetic waves . 224
J. W. Mather: Diagnostics of the confinement and heating of a plasma by a rising axial magnetic field (orthogonal pinch) 233
A. C. Kolb, W. R. Faust, A. D. Anderson: A parameter study of magnetic compression of plasmas with end losses 257
C. F. Barnett, J. L. Dunlap, R. S. Edwards, G. R. Haste, J. A. Ray, R. G. Reinhardt, W. J. Schill, R. M. Warner, E. R. Wells: Energy distributions of protons in DCX 264
L. Tonks: The structure of the Astron E-layer 273
C. C. Damm, A. H. Futch, F. Gordon, A. L. Hunt, E. C. Popp, R. F. Post, J. F. Steinhaus: Plasma production by the trapping of energetic atoms 280
Б. Б. Кадомцев: Турбулентная конвекция плазмы в магнитном поле 286

Letters to Editor

W. I. Linlor: Angular momentum relations for plasmas in magnetic fields 309
J. W. Dungey: Torque on a plasma in terms of magnetic stress 312
Abstracts in English. 313
Résumés en français 315
Аннотации на русском языке 318
Resúmenes en español 320
Errata et addenda 322
Author index, Volume 1 323

INTERNATIONAL ATOMIC ENERGY AGENCY · AGENCE INTERNATIONALE DE L'ENERGIE ATOMIQUE · МЕЖДУНАРОДНОЕ АГЕНТСТВО ПО АТОМНОЙ ЭНЕРГИИ · ORGANISMO INTERNACIONAL DE ENERGIA ATOMICA

Board of Editors — Comité de rédaction — Редакционная коллегия — Consejo de redacción

Dr. K. W. ALLEN (К. У. Аллен)

United Kingdom Atomic Energy Authority, Aldermaston, Berkshire, England

Prof. Dr. L. BIERMANN (Л. Бирман)

Max-Plank-Institut für Physik und Astrophysik, München, Federal Republic of Germany

Dr. S. A. COLGATE (С. А. Колгейт)

University of California, Lawrence Radiation Laboratory, Livermore, California, U.S.A.

Dr. W. F. GAUSTER (У. Ф. Гаустер)

Oak Ridge National Laboratory, Oak Ridge, Tennessee, U.S.A.

Prof. Koji HUSIMI (К. Хусими)

Institute of Plasma Physics, Nagoya University, Nagoya, Japan

Проф. д-р И. Ф. КВАРЦХАВА (I. F. Kvartskhava)

Физико-технический институт
Академии Наук Грузинской ССР,
Сухуми, СССР

Dr. B. LEHNERT (Б. Ленерт)

The Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden

Dr. J. G. LINHART (Дж. Г. Линхарт)

Association Euratom-Comitato Nazionale per le Richerche Nucleari, Laboratorio Gas Ionizzati, Rome, Italy

Prof. Dr. Elemér NAGY (Е. Надь)

Loránd Eötvös University, Budapest, Hungary

Prof. Dr. P. J. NOWACKI (П. И. Новацки)

Institute of Nuclear Research, Warsaw, Poland

Проф. д-р В. Д. ШАФРАНОВ (V. D. Shafranov)

Институт атомной энергии имени
И. В. Курчатова Академии Наук СССР,
Москва, СССР

Prof. Lyman SPITZER, Jr. (Л. Спицер)

Project Matterhorn, Princeton University, Princeton, New Jersy, U.S.A.

Dr. P. C. THONEMANN (П. С. Тонеман)

United Kingdom Atomic Energy Research Establishment Harwell, Berkshire, England

Dr. J. L. TUCK (Дж. Л. Так)

University of California, Los Alamos Scientific Laboratory Los Alamos, New Mexico, U.S.A.

Dr. G. VENDRYES (Ж. Вендрис)

Commissariat à l'Energie Atomique, Fontenay-aux-Roses, Seine, France

Prof. C. N. WATSON-MUNRO (С. Н. Уотсон-Манро)

University of Sydney,
Sydney, New South Wales, Australia

Проф. д-р Н. А. ЯВЛИНСКИЙ (N. A. Yavlinsky)

Институт атомной энергии имени
И. В. Курчатова Академии Наук СССР,
Москва СССР

Scientific Editor: Dr. J. G. BECKERLEY, Division of Scientific and Technical Information, IAEA

NUCLEAR FUSION 1 (1961)

RELATIVISTIC PLASMA

BEHRAM KURŞUNOĞLU*

DEPARTMENT OF PHYSICS, UNIVERSITY OF MIAMI

CORAL GABLES, FLORIDA, U.S.A.

The relativistic transport equation for a one-particle distribution function is discussed. Transverse and longitudinal oscillations of a low-density plasma in the absence of external fields is considered by neglecting the collisions. Relativistic dispersion relations are derived and compared with non-relativistic theory.

1. Introduction

In principle it should be possible to formulate a relativistic theory of any statistical system. Namely, one can give a physical meaning to a relativistic distribution function ϱ. For a given law of force there exists a ϱ which can be used to calculate averages of relevant physical quantities represented as functions of coordinates and momenta. Relativistically, it is not possible to introduce a particular model, such as hard spheres or elastic spheres, for the constituents of a statistical ensemble. We may, however, envisage an $8N$ dimensional phase space for an N-particle statistical system. In this case, because of the introduction of N different time coordinates (direct interaction method), we can no longer state Liouville's theorem in the form it is understood in classical statistical mechanics. That is to say, the distribution function ϱ as a function of N time coordinates is not a constant of the motion.

Instead of the usual collision frequency, relaxation time concepts or "hierarchy of relaxation times", as in Bogolyubov's formulation, one has to consider N-fold more parameters than in the orthodox theory. There are actually, in a fully relativistic theory, sets of relaxation times and sets of collision frequencies. For example, if $x_{(i)}{}^{\mu}$ and $p_{(i)}{}^{\mu}$ $(i=1, 2, \ldots. N$ and $\mu=1, 2, 3, 4)$ are coordinates and momenta in relativistic sense, then our generalized phase space of an N-particle system requires $8N-(6N+1)=2N-1$ more parameters than the orthodox phase space. In a sense there is more information contained in a relativistic distribution function ϱ than in the non-relativistic distribution function f_0 which is a function of $(6N+1)$ variables.

In the case of a single-particle distribution we have an 8-dimensional phase space and a distribution function $\varrho(x_\mu, p_\mu)$ of the four coordinates and four momenta. In this case, as in ordinary theory, collisions are the basic mechanism for the change of ϱ with time. This is certainly correct for a gas consisting of neutral atoms and molecules. However, for a plasma, long range interactions, including retardation, are in some situations more important.

Relativistic theories of plasma have been investigated by others [1]. Recently KLIMONTOVICH has derived a one-particle distribution equation of Vlasov type (i.e. self-consistent collisionless Boltzmann equation). SIMON and HARRIS [2] have developed a statistical theory for the radiation field of the plasma which puts particles and radiation oscillators on equal footing, treating both statistically. Their treatment is made relativistic (in three-dimensional sense) by replacing velocities by their relativistic expressions. The latter procedure is also used by DRUMMOND and ROSENBLUTH [3]. A somewhat similar approach to ours is discussed by GOTO [4]*. In this paper we develop a relativistic theory by a direct relativistic definition of the distribution function and also of the phase space of one-particle distribution.

2. Relativistic one-particle distribution

We consider the time variation of a one-particle distribution function in an 8-dimensional phase space. Let $\varrho(x^\mu, p_\mu)$ be a function of four coordinates x^μ and four momenta p_μ with the following properties:

(1) $\varrho \geqq 0$ over all phase space;
(2) ϱ tends to zero with $p_\mu \to \infty$ $(\mu=1, 2, 3, 4)$;
(3) the time rate of change of ϱ results entirely from collisions;
(4) the distribution function ϱ is normalized according to

$$\int \frac{1}{c}\varrho\, v^\mu \,\mathrm{d}\sigma_\mu \,\mathrm{d}^4 p = \text{const.}, \tag{2.1}$$

where

$$\frac{1}{c} v^\mu \,\mathrm{d}\sigma_\mu \,\mathrm{d}^4 p = \mathrm{d}\Gamma_1 \tag{2.2}$$

is the phase-space element of one-particle distribution and where

$$v^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}. \tag{2.3}$$

* This work was performed during summer 1960 while the author was in the Neutron Physics Division, Oak Ridge National Laboratory, Oak Ridge, Tennessee.

* The present theory differs from the recent theory by WATSON, BLUDMAN, ROSENBLUTH [5] only in being manifestly covariant.

$d\tau$ is the proper time element. The above definition of phase space element was also used by KLIMONTOVICH [1] and it is, of course, suggested from the usual definition of the four-current vector where one integrates the current density over a space-like surface to express conservation of electric charge. The definition of $d\Gamma_1$ as given by Eq. (2.2) shows clearly that it is an invariant. The function ϱ as defined by Eqs. (2.1) — (2.4) will be regarded as the relativistic distribution function of the statistical system. It is to be understood that

$$\varrho \, d\Gamma_1 \tag{2.4}$$

is the probability that the phase-space trajectory of the particle will intersect the hypersurface element $d\sigma_\mu$ at a point x^μ with the values of momenta around p_μ.

The relation of the 8-dimensional distribution function ϱ to a 7-dimensional distribution function f is given by

$$f(r,p,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varrho \, dp_0 , \tag{2.5}$$

where the integration is over the fourth component of p_μ. The normalization of f is defined by

$$\iint_\sigma \frac{1}{c} f v^\mu \, d\sigma_\mu \, d^3p = \text{const.} \tag{2.6}$$

In non-relativistic limit ($c \to \infty$) it reduces to

$$\int f_0 d^3r \, d^3v = \text{const.}, \tag{2.7}$$

which is the usual definition of normalization for one-particle distribution functions. The function f_0 is related to f by

$$f_0 = \operatorname*{Lim}_{c-\infty} (f m^3 \gamma^5), \tag{2.8}$$

where

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} .$$

For a manifestly covariant theory, where one can directly recognize the nature of various terms in the interaction, it is more convenient to use the distribution function ϱ rather than f defined in (Eq. 2.6). In our approach we shall not postulate a conservation law, as was assumed by Klimontovich, for ϱ in phase space. We shall show in the following that the assumptions of Eqs. (2.1) — (2.4) are sufficient for a formal derivation of relativistic transport equation. Moreover, our assumptions contain collisionless Boltzmann equations as a special case, since we did not posit the conservation of ϱ in advance.

Now, if we consider integration over a closed hypersurface, then the definition of normalization Eq. (2.1) can be replaced by

$$\frac{1}{c} \oint\!\!\!\!\!\!\bigcirc \varrho v^\mu \, d\sigma_\mu \, d^4p = 0 . \tag{2.9}$$

By using Gauss' theorem we can transform this into a volume integration over space and time,

$$\iint \frac{\partial (\varrho v^\mu)}{\partial x^\mu} \, d^4x \, d^4p = 0 . \tag{2.10}$$

The time rate of change of ϱ is given by

$$\frac{d\varrho}{d\tau} = v^\mu \frac{\partial \varrho}{\partial x^\mu} + \dot{p}^\mu \frac{\partial \varrho}{\partial p^\mu} \tag{2.11}$$

where

$$\dot{p}^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} .$$

If we assume the existence of a relativistic Hamiltonian H and use the corresponding Hamilton's equations of motion

$$v_\mu = \frac{\partial H}{\partial p^\mu} , \quad \dot{p}_\mu = -\frac{\partial H}{\partial x^\mu} , \tag{2.12}$$

then Eq. (2.11) can be written as

$$\frac{d\varrho}{d\tau} = \frac{\partial (\varrho v^\mu)}{\partial x^\mu} + \frac{\partial (\varrho \dot{p}^\mu)}{\partial p^\mu} . \tag{2.13}$$

By integrating Eq. (2.13) over the 4-dimensional coordinate and momentum spaces and using Eq. (2.10) we obtain

$$\iint \frac{d\varrho}{d\tau} \, d^4x \, d^4p = \iint \frac{\partial (\varrho \dot{p}^\mu)}{\partial p^\mu} \, d^4p \, d^4x . \tag{2.14}$$

The integrations over the momenta on the right can be transformed into two-dimensional surface integrals. Thus

$$\int \frac{\partial (\varrho \dot{p}^\mu)}{\partial p^\mu} \, d^3p \, dp_0 = \int \left(\nabla_p \cdot (\varrho \dot{p}) + \frac{\partial (\varrho \dot{p}_0)}{\partial p_0} \right) d^3p \, dp_0$$

$$= \int \varrho \, (\dot{p} \cdot dS_p) \, dp_0 + \int [\varrho \dot{p}_0]_{-\infty}^{+\infty} d^3p = 0 ,$$

as follows from the condition (2) above. Hence, we finally have

$$\iint \frac{d\varrho}{d\tau} d^4x \, d^4p = 0 , \tag{2.15}$$

where there is no restriction on the volume integration over coordinate space. We may, therefore, consider the vanishing of the integral of $d\varrho/d\tau$ over the 4-dimensional momentum volume as the basic statement of (2.15). In this case we can chose to link this integral condition with the property (3) of ϱ; that is, we assume that the time rate of change of ϱ results entirely from collisions*. Hence, from (2.15) we can infer the result

$$\frac{d\varrho}{d\tau} = \left(\frac{\partial \varrho}{\partial \tau}\right)_c \tag{2.16}$$

where the right-hand term represents the change in ϱ arising from collisions and its integral over the 4-dimensional momentum volume is zero.

We thus see that the Boltzmann equation for the one-particle (or single phase-space trajectory) distribution is formally given by

$$v^\mu \frac{\partial \varrho}{\partial x^\mu} + \dot{p}^\mu \frac{\partial \varrho}{\partial p^\mu} = \left(\frac{\partial \varrho}{\partial \tau}\right)_c \tag{2.17}$$

The form of $(\partial\varrho/\partial\tau)_c$ for a plasma, where electrodynamic forces constitute the basic interactions, can

* The integral of $(\partial\varrho/\partial\tau)_c$ over momentum space vanishes, since collisions cannot change the total number of particles per cubic centimeter. See page 96 of SPITZER [6].

in principle be obtained from a "relativistic hierarchy".

It is to be noticed that we did not use any particular definition of the momentum variables. We are, therefore, permitted to choose the usual definition of relativistic momentum by

$$p_\mu = m v_\mu \tag{2.18}$$

and rewrite Eq. (2.17) in the form

$$\frac{1}{m} p^\mu \frac{\partial \varrho}{\partial x^\mu} + F^\mu \frac{\partial \varrho}{\partial p^\mu} = \left(\frac{\partial \varrho}{\partial \tau}\right)_c, \tag{2.19}$$

where

$$F^\mu = \dot{p}^\mu = \frac{e}{mc} f^{\mu\nu} p_\nu \tag{2.20}$$

is the total electromagnetic force and $f_{\mu\nu}$ is the electromagnetic field. We may use the definition (2.20) and record Eq. (2.19) in the following forms

$$p^\mu \frac{\partial \varrho}{\partial x^\mu} + \frac{e}{c} f^{\mu\nu} p_\nu \frac{\partial \varrho}{\partial p^\mu} = m \left(\frac{\partial \varrho}{\partial \tau}\right)_c \tag{2.21}$$

or

$$\frac{1}{m} p^\mu \frac{\partial \varrho}{\partial x^\mu} + \frac{ie}{2mc} f^{\mu\nu} L_{\mu\nu} \varrho = \left(\frac{\partial \varrho}{\partial \tau}\right)_c, \tag{2.22}$$

where the Hermitian operator $L_{\mu\nu}$ is defined as

$$L_{\mu\nu} = i\left(p_\mu \frac{\partial}{\partial p^\nu} - p_\nu \frac{\partial}{\partial p_\mu}\right) \tag{2.23}$$

and obeys the same commutation rules as the angular momentum in quantum mechanics. It is particularly useful for the discussion of cyclotron behavior of a plasma in the presence of an external magnetic field.

Eqs. (2.21) and (2.22) in 3-dimensional notation assume the forms

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \varrho + \left(e\mathbf{E} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right) \cdot \nabla_p \varrho + \frac{e}{c} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}) \frac{\partial \varrho}{\partial p_0} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\partial \varrho}{\partial \tau}\right)_c \tag{2.24}$$

and

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \varrho + \frac{ie}{mc} \gamma^{-1} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{L} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{M}) \varrho = \gamma^{-1} \left(\frac{\partial \varrho}{\partial \tau}\right)_c, \tag{2.25}$$

where the operators $\mathbf{L}$ and $\mathbf{M}$ refer to space and time parts of $L_{\mu\nu}$.

Integration of both sides of Eq. (2.24) with respect to p_0 over the interval ($p_0 = -\infty$, $p_0 = +\infty$) leads to

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \left(e\,\mathbf{E} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right) \cdot \nabla_p f = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_c, \tag{2.26}$$

which differs from the non-relativistic Boltzmann equation only in the third term where the gradient operator ∇_p is defined with respect to relativistic momentum, and also in the form of the collision term on the right hand side. The result (2.26) as obtained from (2.24) is based on the assumption

$$\varrho(E) = \varrho(-E), \tag{2.27}$$

where

$$E = c\, p_0 .$$

The assumption (2.27) implies equal probability for both positive and negative energy particles. The creation of positrons for plasmas of temperatures above 1 Mev is conceivable, but the effect, being purely of quantum mechanical origin, cannot make much sense in classical formulation since positrons are produced by quantum transitions and not by a continuous process, where, at a given time only "part of the positron" could be made.*

A relativistic Maxwell distribution would have the general form

$$\varrho_m = A\,[\exp(-c\,p_0/\varkappa T)\,\delta(p_0 - \sqrt{p^2 + m^2 c^2}) + \exp(c\,p_0/\varkappa T)\,\delta(p_0 + \sqrt{p^2 + m^2 c^2})]\, n_0 ,$$

where

$$A = \frac{1}{4\pi m^3 c^3} \frac{\alpha}{K_2(\alpha)} \tag{2.28}$$

$$\alpha = \frac{mc^2}{\varkappa T} ,$$

and the Bessel-function of the second kind is

$$K_n(\alpha) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(n + \frac{1}{2})} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^n \int_0^\infty \exp(-\alpha \cosh u)\, (\sinh u)^{2n}\, \mathrm{d}u .$$

Negative energies will not be included in our discussions and we shall therefore take for the relativistic Maxwell distribution the expression

$$\varrho_m = A \exp(-c\,p_0/\varkappa T)\,\delta(p_0 - \sqrt{p^2 + m^2 c^2})\, n_0 , \tag{2.29}$$

which for the f distribution becomes [7]

$$f_m = \int \varrho_m \,\mathrm{d}\, p_0 = A \exp[-\alpha \sqrt{1 + p^2/m^2 c^2}]\, n_0 . \tag{2.30}$$

In terms of Fourier transforms

$$f_{\mu\nu}(x) = -\frac{4\pi i e}{mc} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \times \int \exp(i\, k_\alpha x^\alpha) \frac{k_\mu p_\nu' - k_\nu p_\mu'}{k_\alpha k^\alpha} \varrho(k, p')\, \mathrm{d}^4 k\, \mathrm{d}^4 p'$$

and

$$\varrho(k, p) = \int \exp(-k_\alpha x^\alpha) \varrho(x, p)\, \mathrm{d}^4 x .$$

The collisionless Boltzmann equation [obtained from Eq. (2.21) with $(\partial \varrho/\partial \tau)_c = 0$] can be written as

$$\varrho(k, p) = \frac{e^2}{mc^2} \frac{p_\nu}{p_\alpha k^\alpha} \frac{1}{4\pi^3} \int \frac{q^\mu p'^\nu - q^\nu p'^\mu}{q_\alpha q^\alpha} \times \varrho(q, p') \frac{\partial \varrho(k - q, p)}{\partial p^\mu} \,\mathrm{d}^4 q\, \mathrm{d}^4 p' \tag{2.31}$$

The current density is given by

$$J_\mu(x) = \frac{e}{mc} \int \varrho(x, p)\, p_\mu \,\mathrm{d}^4 p . \tag{2.32}$$

3. Relativistic dispersion theory

We shall consider, as a simple application of one-particle theory, a one-component plasma, the electron gas. The study of the existence of plane waves with

* Another way to deduce Eq. (2.26) from (2.24) can proceed with an "Ansatz" of writing $\varrho(p_\mu, \chi^\mu) = F(p^\mu, \chi^\nu)\,\delta(E - c\sqrt{p^2 + m^2 c^2})\, mc^2/|E|$, which is the method used by KLIMONTOVICH [1].

frequency ω and wave vector $\mathbf{k}$ in a high temperature plasma is of some interest. In non-relativistic theory this problem has been investigated by others. CLEMMOW and WILSON [8] have used a three-dimensional relativistic formalism and obtained dispersion relations for the coherent longitudinal oscillations of an infinite plasma. Their investigation does not include a discussion of transverse waves and also justification of the use of divergent integral to derive a dispersion relation is not simple.

A paper by VAN KAMPEN [9] contains a detailed discussion of various points of views on the dispersive properties of a plasma. He points out that the difference between results obtained by various authors have their origin in mathematical difficulties and that a careful analysis of the eigenvalue problem should resolve these differences. Van Kampen's claim is entirely correct and this problem is now solved unambigously.

For small longitudinal oscillations of an electron gas in the absence of collisions the dispersion equation for low temperatures obtained by VLASOV [10], LANDAU [11], BOHM and GROSS [12] is

$$\omega^2 = \omega_p^2 + \frac{3\varkappa T}{m} k^2 . \tag{3.1}$$

The results obtained by CLEMMOW and WILSON [8] and by BERZ [13] are slightly different from Eq. (3.1).

The main contributions of this paper to the dispersion problem can be summarized as follows:

1) We use a fully relativistic theory and the corresponding dispersion integrals are integrated in a covariant way. There is, of course, no restriction on the range of thermal motions of the electrons.
2) The use of the retarded propagators of the electromagnetic field together with the free particle propagators define an initial-value problem.
3) Both non-relativistic and relativistic dispersion relations for transverse and longitudinal waves are derived and discussed.

In most situations the time evolution of a statistical distribution is not of direct physical interest. Nevertheless, in solving the initial-value problem one also obtains certain stationary solutions that fall within the domain of direct observability.

Now, let us assume that the Fourier transform of the relativistic one-particle distribution is of the form

$$\varrho(k, p) = (2\pi)^4 n_0 \varrho_m(p) \delta(k) + \varrho_1(k, p) , \tag{3.2}$$

where $\varrho_1(k, p)$ represents a deviation from equilibrium state. Eq. (2.31) is then linearized and we obtain the eigenvalue equation

$$\varrho_1(k, p) = \frac{\omega_p^2}{c^2} \frac{p_\nu}{p_\alpha k^\alpha} \frac{1}{k_\beta k^\beta} \frac{\partial \varrho_m}{\partial p^\mu} \times \int (k^\mu p'^\nu - k^\nu p'^\mu) \varrho_1(k, p') \, \mathrm{d}^4 p' . \tag{3.3}$$

This equation is assumed to have a complete set of eigenfunctions corresponding to each k_μ. The solutions of direct physical interest can be separated out by deriving from Eq. (3.3) an equation for the charge-current distribution of the plasma. The Fourier transform of the 4-current is given by

$$J^\alpha(k) = \frac{e}{mc} \int \varrho_1(k, p) \, p^\alpha \, \mathrm{d}^4 p . \tag{3.4}$$

On multiplying both sides of Eq. (3.3) by the vector p^ν and integrating over the p-space we obtain

$$J^\gamma = \frac{\omega_p^2}{c^2} \frac{1}{k_\alpha k^\alpha} (k^\mu J^\nu - k^\nu J^\mu) \int \frac{p^\gamma p_\nu}{p_\beta k^\beta} \frac{\partial \varrho_m}{\partial p^\mu} \mathrm{d}^4 p . \tag{3.5}$$

Integrating by parts and using the fact that ϱ_m tends to zero for infinite values of the momentum we obtain

$$J^\gamma = \frac{\omega_p^2}{c^2} \frac{1}{k_\alpha k^\alpha} (J^\mu k^\nu - J^\nu k^\mu) \int \varrho_m \frac{\partial}{\partial p^\mu} \left(\frac{p^\gamma p_\nu}{k_\beta p^\beta} \right) \mathrm{d}^4 p ,$$

which can be written as

$$J^\gamma \left(\frac{\omega_p^2}{c^2 k_\alpha k^\alpha} - 1 \right) = \omega_p^2 J^\mu \left(\frac{1}{c^2} I_\mu{}^\gamma + \frac{k^\gamma}{c k_\alpha k^\alpha} I_\mu \right) \tag{3.6}$$

where

$$I^\gamma = \frac{1}{c} \int \frac{p^\gamma}{k_\alpha p^\alpha} \varrho_m(p) \, \mathrm{d}^4 p \tag{3.7}$$

$$I_\mu{}^\gamma = -\int \frac{p^\gamma p_\mu}{(k_\alpha p^\alpha)^2} \varrho_m(p) \, \mathrm{d}^4 p \tag{3.8}$$

and where we used the conservation of current

$$J^\alpha k_\alpha = 0 . \tag{3.9}$$

We shall choose for equilibrium distribution ϱ_m the relativistic Maxwell distribution. In this case Eq. (3.7) becomes

$$I^\gamma = \frac{1}{4\pi (mc)^3} \frac{\alpha}{c K_2(\alpha)} \int \frac{p^\gamma \, \delta[p_0 - \sqrt{p^2 + m^2 c^2}]}{k_0 p_0 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{p}} \times \mathrm{e}^{-c p_0 / \varkappa T} \mathrm{d}^3 p \, \mathrm{d} p_0 \tag{3.10}$$

The only non-vanishing integrals refer to the fourth and third components of I^ν. The integral I^3 is, because of the relation

$$c I^\gamma k_\gamma = 1 , \tag{3.11}$$

a linear function of I_0. The integral I_0 is given by

$$I_0 = \frac{1}{4\pi (mc)^3} \frac{\alpha}{c K_2(\alpha)} \times \int \frac{\sqrt{p^2 + m^2 c^2} \exp[-\alpha \sqrt{1 + m^2 c^2 / p^2}]}{k_0 \sqrt{p^2 + m^2 c^2} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{p}} \mathrm{d}^3 p \tag{3.12}$$

where $ck_0 = \omega$. The integrals $I_\mu{}^\gamma$ are expressible as functions of I_0 (see Appendix 1).

The relativistic dispersion relations follow from the determinental condition obtained for the existence of a current distribution J^α, from Eq. (3.6) as

$$1 = \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - k^2 c^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2} I_1{}^1 \tag{3.13}$$

$$\frac{\omega_p^2 + k^2 c^2}{\omega^2 - k^2 c^2} = \omega_p^2 \frac{\partial I_0}{\partial \omega} + \frac{2\omega \omega_p^2}{\omega^2 - k^2 c^2} I_0 . \tag{3.14}$$

The dispersion relation Eq. (3.13), describe transverse modes of the plasma. The dispersion

relation Eq. (3.14) refers to longitudinal oscillations. Thus the transverse and longitudinal modes, because of the absence of an external magnetic field, are decoupled. The above equations are valid at all temperatures and for all wavelengths of a disturbance set up in the plasma. The dispersion relation (3.13) is doubly degenerate; it is a consequence of the linearization process adopted for the collisionless Boltzmann equation*. For $T=0$ the dispersion relation, Eq. (3.14) reduces to $\omega^2=\omega_p{}^2$.

We shall first discuss the non-relativistic theory. We have two reasons: (1) to give a rigorous derivation of the already known dispersion formula, (2) to develop a method for the non-relativistic theory which can be extended to relativistic theory. We shall use two methods.

3.1 Direct integration method

In the non-relativistic limit (using the expression for relativistic momenta and making c tend to infinity) the integral Eq. (3.12) becomes

$$I_0{}^N=\left(\frac{\alpha}{2\pi c^2}\right)^{3/2}\int\frac{\exp\left(-\alpha v^2/2c^2\right)}{\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}+i\varepsilon}\,d^3v\,, \tag{3.15}$$

where small positive imaginary part ε specifies the initial-value problem. It is equivalent to fixing the direction of flow of time, i.e. the irreversibility of the system. The latter leads to Landau damping of plasma waves. We can write Eq. (3.16) as

$$I_0{}^N=\frac{1}{kc}\sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left(-\alpha y^2/2\right)}{\mu+y+i\varepsilon}\,dy\,, \tag{3.16}$$

where

$$\mu=\frac{\omega}{kc}=\frac{v_p}{c}$$

$$v_p=\text{phase velocity} \tag{3.17}$$

and where we have performed the angle integrations and then we have integrated by parts once. By writing $I_0{}^N$ in the form

$$I_0{}^N=\frac{-i}{kc}\sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}du\exp\left[+iu\left(\mu+y+i\varepsilon\right)\right]\times\exp\left(-\alpha y^2/2\right)dy\,, \tag{3.18}$$

we can carry out the integrations and obtain

$$I_0{}^N=\frac{\mu\alpha}{\omega}e^{-\alpha\mu^2/2}\int_0^{\mu}e^{-\alpha\mu^2/2}\,du-i\sqrt{\frac{\alpha\pi}{2}}\,e^{-\alpha\mu^2/2}\,\frac{\mu}{\omega}\,, \tag{3.19}$$

where the first term refers to the principal part of the integral arising from

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\mu+y+i\varepsilon}=\mathsf{P}\frac{1}{\mu+y}-i\pi\delta\left(\mu+y\right). \tag{3.20}$$

The imaginary part of Eq. (3.19) refers to Landau damping.

The non-relativistic limit of the dispersion relation, Eq. (3.14), is given by

$$1=-\omega_p{}^2\frac{d\,I_0{}^N}{d\,\omega}\,. \tag{3.21}$$

This agrees with the usual dispersion formula.

3.2. Differential equation method

A Hermite function with imaginary argument and of order -1 satisfies the differential equation

$$\frac{d^2Y}{dx^2}+x\frac{dY}{dx}+Y=0\,. \tag{3.22}$$

The integral of Eq. (3.16) is a solution of an equation of this form, where the independent variable is μ. Thus, by solving the equation

$$\frac{d^2I_0{}^N}{d\mu^2}+\mu\alpha\frac{d\,I_0{}^N}{d\mu}+\alpha\,I_0{}^N=0 \tag{3.23}$$

we can have $I_0{}^N$ integrated. From (3.23) we obtain

$$\frac{d\,I_0{}^N}{d\mu}+\alpha\mu\,I_0{}^N=D, \tag{3.24}$$

where D is a constant independent of μ and where we assume the μ contains the small positive imaginary part $+i\varepsilon$. The constant D must be defined by using the integral (3.16) in Eq. (3.24). In this way the resulting expression becomes the actual integration of Eq. (3.16). Hence

$$D=-\frac{1}{kc}\sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left(-\alpha y^2/2\right)}{\left(\mu+y+i\varepsilon\right)^2}\,dy+\frac{\alpha\mu}{kc}\sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left(-\alpha y^2/2\right)}{\mu+y+i\varepsilon}\,dy$$

$$=\frac{\alpha}{kc}\sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha y^2/2}\,dy=\frac{\alpha}{kc}\,.$$

The differential equation is now reduced to

$$\frac{d\,I_0{}^N}{d\mu}+\alpha\mu\,I_0{}^N=\frac{\alpha}{kc}\,. \tag{3.25}$$

The solution of this equation without the right hand side suggests the substitution

$$I_0{}^N=e^{-\alpha\mu^2/2}\,g\left(\mu\right).$$

Hence we find that

$$I_0{}^N=g\left(0\right)e^{-\alpha\mu^2/2}+\frac{\alpha\,e^{-\alpha\mu^2/2}}{kc}\int_0^{\mu}e^{-\alpha\mu^2/2}\,du \tag{3.26}$$

where $g(0)$, as follows from Eq. (3.16), is zero. When ε tends to zero, the above integral (3.26) tends to the principal value of (3.16). The imaginary part also satisfies the differential equation Eq. (3.23). We shall now extend this method to relativistic theory.

* Non-linearity of the collisionless Boltzmann equation together with its self-consistency implies a certain non-linearity for the electromagnetic field of the plasma. One ought to expect some new effects from a close study of the non-linear theory of the plasma. With all its virtues and vices, together with its severe limitations, the linearized theory has been emphasized in the literature.

By using polar coordinates and the substitution

$$p = m\,c \sinh\varphi\,,$$

the relativistic integral can be written as

$$I_0 = \frac{\alpha}{2\,k\,c\,K_2(\alpha)} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,\alpha^2} \int_0^\infty \mathrm{d}\,\varphi \int_{-1}^{1} \frac{\sinh^2\varphi\,(\mathrm{e}^{-\alpha\cosh\varphi})}{\mu\cosh\varphi - x\sinh\varphi}\,\mathrm{d}\,x$$

or

$$I_0 = \frac{\alpha}{c\,k\,K_2(\alpha)} \frac{\mathrm{d}^2 \Lambda}{\mathrm{d}\,\alpha^2}\,, \tag{3.27}$$

where

$$\Lambda = \frac{1}{2}\int_0^\infty \mathrm{d}\varphi \int_{-1}^{1} \frac{\sinh^2\varphi\,(\mathrm{e}^{-\alpha\cosh\varphi})}{\mu\cosh\varphi - x\sinh\varphi}\,\mathrm{d}\,x$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty \mathrm{d}\,\varphi \sinh\varphi\,\mathrm{e}^{-\alpha\cosh\varphi} \log\left[\frac{\mu\cosh\varphi + \sinh\varphi}{\mu\cosh\varphi - \sinh\varphi}\right].$$

Integration by parts leads to

$$\Lambda = \frac{1}{2a}\sqrt{1+\eta^2}\int_a^\infty \mathrm{d}\,\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-\alpha\sqrt{1+y^2})}{\eta + y + \mathrm{i}\varepsilon} \tag{3.28}$$

where

$$y = \sinh\varphi$$

$$\mu = \frac{\eta}{\sqrt{1+\eta^2}}\,. \tag{3.29}$$

We now write

$$I(\alpha,\eta) = \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-\alpha\sqrt{1+y^2})}{\eta + y + \mathrm{i}\varepsilon}\,\mathrm{d}\,y \tag{3.30}$$

and record Λ in the form

$$\Lambda = \frac{1}{a}\sqrt{1+\eta^2}\int_a^\infty \alpha\,I(\alpha,\eta)\,\mathrm{d}\,\alpha\,. \tag{3.28'}$$

The integral Eq. (3.30) can be compared with the non-relativistic integral Eq. (3.16). But in this case the existence of branch points in the integrand poses an entirely different problem. Application of the complex integration method is found quite impractical. We shall follow the differential equation method used for the non-relativistic theory. This method takes correct account of the branch-point integration.

It is easily seen that the integral Eq. (3.30) satisfies the integro-differential equation

$$\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}\,\eta^2} + \eta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\eta}\int_\alpha^\infty \alpha I\,\mathrm{d}\,\alpha + \int_\alpha^\infty \alpha I\,\mathrm{d}\,\alpha = 0\,, \tag{3.31}$$

where η has its usual small positive imaginary part. This equation is a generalization of the non-relativistic Hermite function of imaginary argument of order -1.

It can be integrated once to give

$$\frac{\mathrm{d}\,I}{\mathrm{d}\,\eta} + \eta\int_\alpha^\infty \alpha I\,\mathrm{d}\,\alpha = B\,, \tag{3.32}$$

where B is a constant independent of η. By using the integral (3.30) in (3.32) we can evaluate the constant B as

$$B = \int_0^\infty \frac{\exp(-\alpha\sqrt{1+y^2})}{\sqrt{1+y^2}}\,\mathrm{d}\,y = K_0(\alpha)\,; \tag{3.33}$$

thus the equation reduces to

$$\frac{\mathrm{d}\,I}{\mathrm{d}\,\eta} + \eta\int_0^\infty \alpha I\,\mathrm{d}\,\alpha = K_0(\alpha)\,. \tag{3.34}$$

The imaginary part of the integral I follows from (3.20) and (3.30) as

$$\mathrm{Im}\,(I) = \frac{-\pi}{2\,\alpha}\exp(-\alpha\sqrt{1+\eta^2}) \tag{3.35}$$

and it satisfies Eq. (3.31) and also Eq. (3.34) without the right hand side, $K_0(\alpha)$. Hence for the most general solution of (3.34) we can find that the real part $\mathrm{Re}\,I$ of I is given by

$$\mathrm{Re}\,I = \int_0^\eta K_0[\alpha\sqrt{1+\eta^2-u^2}]\,\mathrm{d}\,u \tag{3.36}$$

For a different evaluation of I, see Appendix 1. The complete integral is the sum of real and imaginary parts defined by Eqs. (3.36) and (3.35), respectively. Hence, the integral Λ, as follows from Eq. (3.34), is given by

$$\Lambda = \frac{1}{\alpha\,\mu}K_0(\alpha) - \frac{1}{\alpha\,\mu}\frac{\mathrm{d}\,I}{\mathrm{d}\,\eta} \tag{3.37}$$

where

$$\mathrm{Re}\,\Lambda = \sqrt{1+\eta^2}\int_0^\eta \frac{K_1[\alpha\,(1+\eta^2-u^2)^{1/2}]}{(1+\eta^2-u^2)^{1/2}}\,\mathrm{d}\,u \tag{3.38}$$

The dispersion integral I_0 can now be calculated from Eq. (3.27).

4. Discussion of dispersion relations

We begin with the non-relativistic theory. For temperatures low compared to 0.5 Mev (i.e. for $\alpha \gg 1$) and for wavelengths

$$\lambda \gg \frac{2\,\pi\,v}{\omega}\,, \tag{4.1}$$

where $\lambda = 2\pi/k$, the integral

$$I_0{}^N = \sqrt{\frac{\alpha}{2\,\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-\alpha y^2/2)}{\omega + k\,c\,y}\,\mathrm{d}\,y,$$

because of the cutoff in the velocities brought about by the above assumption and Gaussian nature of Maxwellian tail, can be expanded (this is the usual procedure). The result is

$$\frac{\mathrm{d}\,I_0{}^N}{\mathrm{d}\,\omega} \cong -\frac{1}{\omega^2} - \frac{3k^2c^2}{\alpha\,\omega^4} \tag{4.2}$$

This together with Eq. (3.21) leads to the dispersion relation Eq. (3.1). The above procedure is, of course,

ambiguous, but it happens to be correct in a certain approximation as will be demonstrated below. The approximation is that the phase velocity of the particles is much larger than the thermal speeds.

The dispersion integral of the non-relativistic theory can be written as

$$I_0^N = \frac{2}{\omega} x e^{-x^2} \int_0^x e^{u^2} \, du - i \frac{\sqrt{\pi}}{\omega} x e^{-x^2}, \qquad (4.3)$$

where

$$x = \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \mu .$$

It has been shown by SAKAMOTO [14] that the functions

$$G(x) = \frac{1}{x} e^{-x^2} \int_0^x e^{u^2} \, du ,$$

$$H(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{u^2} \, du$$

as x tends to zero $G \to 1$, $H \to 0$, and also as $x \to \infty$, $G \to 0$, $H \to 0$. For $x \geqq 3.6$ they can be expanded according to

$$G(x) = \frac{1}{2x^2 - 1} + \frac{2}{(2x^2-1)^3} + \cdots\cdots,$$

$$H(x) = \frac{x}{2x^2 - 1} + \frac{2x}{(2x^2-1)^3} + \cdots\cdots .$$

Therefore, for large enough x the dispersion integral I_0^N can be expanded as

$$I_0^N = \frac{1}{\omega} \left[1 + \frac{\alpha\mu^2 + 1}{(\alpha\mu^2 - 1)^2} + \frac{10\alpha\mu^2 + 2}{(\alpha\mu^2 - 1)^4} + \cdots\cdots \right] \qquad (4.4)$$

where we neglect the imaginary part of I_0. Hence I_0 can be approximated as

$$I_0^N \cong \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\alpha \mu^2 \omega} = \frac{1}{\omega} + \frac{k^2 c^2}{\alpha \omega^3}$$

and

$$\frac{d I_0^N}{d\omega} = -\frac{1}{\omega^2} - \frac{3 k^2 c^2}{\alpha \omega^4}$$

which yields the previous approximation. The dispersion relation Eq. (3.1) is, therefore, correct.

At zero temperature of the electrons we have

$$I_0 = I_0^N = \frac{1}{\omega} \qquad (4.5)$$

$$I_1^1 = 0 .$$

In this case from Eqs. (3.13) and (3.14) we find that

$$\omega^2 = k^2 c^2 + \omega_p^2$$

and

$$\omega^2 = \omega_p^2, \qquad (4.6)$$

respectively. The longitudinal oscillation (4.6) was first derived by TONKS and LANGMUIR [15].

Now, because of the dependence of the parameters α and μ on various physical constants and variables, it is important to distinguish between physical situations that correspond to the same orders of magnitudes of α and μ. For example, a large α can either correspond to a correction to the non-relativistic theory of order v^2/c^2 or to a situation where the temperature is low. Also the parameter μ can be made small either in considering relativistic corrections or by setting up a short wavelength disturbance in the plasma.

The non-relativistic limit of the integral (3.38) can be obtained by the following steps: (1) we first transform the integral (3.36) by making $u = \eta x$ so that the limits of the integral are independent of η, and (2) the parameter η for any given non-zero ω and k tends to zero with $c \to \infty$. Thus the largest term in $\alpha (1 + \eta^2)^{1/2}$ is $\alpha\mu^2$ since other terms are either cancelled or tend to zero with $c \to \infty$.

4.1. TRANSVERSE AND LONGITUDINAL OSCILLATIONS AT LOW TEMPERATURES

The first order thermal effects are contained in the assumptions

$$\alpha \gg 1, \quad \alpha\mu^2 \gg 1, \text{ and } \mu^2 \ll 1. \qquad (4.7)$$

From the expressions for I, I_0 and Λ we find that

$$I = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}} e^{-\alpha} \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\alpha \mu^3} + \frac{1}{\alpha \mu} \right)$$

$$I_0 = \frac{1}{\omega} + \frac{k^2 c^2}{\alpha \omega^3} + \frac{2}{\alpha \omega} . \qquad (4.8)$$

The expression for I_0 differs from the non-relativistic I_0^N only in the existence of the third term in I_0. The expression for the dispersion integral I_1^1 is given by

$$I_1^1 = \frac{c^2}{\alpha \omega^2} + \frac{1}{\alpha k^2} . \qquad (4.9)$$

4.1.1. *Transverse frequencies*

The dispersion equation for transverse waves, as follows from Eqs. (3.13) and (4.9), is

$$-\omega^2 (\omega_p^2 + k^2 c^2) - \frac{\omega_p^2}{\alpha} k^2 c^2 = 0. \qquad (4.10)$$

Hence the corresponding transverse modes of the plasma are given, approximately, by

$$\omega_1^2 = \omega_p^2 + k^2 c^2 + \frac{\omega_p^2 \varkappa T k^2}{m (\omega_p^2 + k^2 c^2)} \qquad (4.11)$$

$$\omega_2^2 = \frac{\omega_p^2 \varkappa T k^2}{m (\omega_p^2 + k^2 c^2)} . \qquad (4.12)$$

The second solution ω_2 is not consistent with our original assumption $\alpha\mu^2 \gg 1$ and therefore it can be discarded. Our results, Eqs. (4.11) and (4.12), agree with the calculation of BERNSTEIN and TREHAN [16].

4.1.2. *Longitudinal frequencies*

For longitudinal waves, from Eqs. (3.14) and (4.8), we have the dispersion equation

$$\omega^4 - \omega^2 \omega_p^2 \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) - \frac{3\omega_p^2}{\alpha} k^2 c^2 = 0. \qquad (4.13)$$

The corresponding longitudinal frequencies are

$$\omega_1^2 = \omega_p^2 + \frac{3\varkappa T}{m} k^2 + \frac{\omega_p^2}{c^2} \frac{\varkappa T}{m} \tag{4.14}$$

$$\omega_2^2 = + \frac{3\varkappa T}{m} k^2. \tag{4.15}$$

As in the transverse case the solution implied by the form of ω_2^2 does not exist since it is not consistent with our assumption $\alpha\mu^2 \gg 1$. The new term in Eq. (4.14) is a second-order relativistic thermal correction to the usual dispersion formula, Eq. (3.1).

4.2. Dispersion relations at infinite temperature

At infinite temperature the parameter α assumes the value zero. In this case from the integrated expressions of I_0 and Λ we obtain

$$\lim_{\alpha=0} I_0 = \frac{1}{ck} \log\left[\eta + \sqrt{(1+\eta^2)}\right] - \frac{i\pi}{2ck}$$

$$= \frac{1}{2ck}\left[\log\left(\frac{kc+\omega}{kc-\omega}\right) - i\pi\right] \tag{4.16}$$

and

$$\lim_{\alpha=0} \Lambda = \frac{1}{2}\left[\log\left(\frac{kc+\omega}{kc-\omega}\right) - i\pi\right], \tag{4.17}$$

where the imaginary part $-i\pi$ arises from the Landau damping for infinite temperature. On substituting (4.16) and (4.17) in the dispersion relations (3.13) and (3.14) we obtain for longitudinal and transverse modes the results

$$\frac{kc}{\omega} = \tanh\left[\frac{kc}{\omega}\left(1 + \frac{k^2c^2}{2\omega_p^2}\right)\right] \tag{4.18}$$

and

$$\frac{kc}{\omega} = \tanh\left[\frac{kc}{\omega}\left(\frac{\omega^2}{\omega^2 - k^2c^2} - \frac{k^2c^2}{\omega_p^2}\right)\right], \tag{4.19}$$

respectively. These relations are exact and they contain the effect of Landau damping. The latter consists of replacing $\coth x$ in the absence of damping (i.e. neglecting the term $-i\pi$ in 4.16 and 4.17) by $\tanh x$ as in (4.18) and (4.19). One of the solutions for the transverse dispersion relation (4.19) is

$$\omega = kc. \tag{4.20}$$

From (4.18) and (4.19) we see that ω is restricted according to

$$\omega \geq kc.$$

However, for phase velocities much larger than c, i.e., for

$$\omega \gg kc$$

the dispersion relations (4.18) and (4.19) yield the result

$$\omega^2 = \frac{2}{3}\omega_p^2 + k^2c^2, \tag{4.21}$$

which holds for both longitudinal and transverse modes. In the derivation of (4.21) we have assumed that the wavelength $\lambda = 2\pi k^{-1}$ is restricted as

$$\lambda \gg \frac{1}{\sqrt{4\pi n_0 r_0}},$$

where n_0 is particle density and r_0 is the classical electron radius.

Acknowledgements

The author wishes to acknowledge some discussions with Drs. E. Guth, A. Simon, and G. Trammel of Oak Ridge National Laboratory; Dr. B. Bertotti of Princeton University and Dr. K. Wildermuth of Florida State University, on the topic of this paper and related subjects.

This research constitutes part of the subject matter supported by the United States Atomic Energy Commission contract No. AT-(40-1)-2761.

Appendix 1

The dispersion integral, Eq. (3.28), can be integrated with a different method. Using the substitution $y = \sinh\tau$, the integral (3.28) can be expressed in the form

$$\Lambda = \frac{1}{2\alpha}\sqrt{1+\lambda^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-\alpha\cosh\tau)}{\lambda + \sinh\tau + i\varepsilon}\, d\tau$$

$$= -\frac{i}{2\alpha}\sqrt{1+\lambda^2}\int_0^{\infty} \exp(i\lambda u)\, du \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha\cosh\tau)\exp(iu\sinh\tau)\, d\tau.$$

From using the formula

$$\exp(iu\sinh\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(iu)\exp(n\tau) = \sum_{-\infty}^{\infty} i^n I_n(u)\exp(n\tau)$$

we get

$$\Lambda = -\frac{i}{2\alpha}\sqrt{1+\lambda^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n \int_0^{\infty} \exp(i\lambda u)\, I_n(u)\, du \times \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\alpha\cosh\tau)\exp(n\tau)\, d\tau.$$

The definitions

$$K_n(\alpha) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha\cosh\tau)\exp(n\tau)\, d\tau$$

and

$$K_0\left[\sqrt{\alpha^2+u^2}\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_n(\alpha)\, I_n(u)\, i^n$$

yield the result

$$\Lambda = -\frac{\mathrm{i}}{\alpha}\sqrt{1+\lambda^2}\int_0^\infty \exp(\mathrm{i}\lambda u)\, K_0[\sqrt{\alpha^2+u^2}]\,\mathrm{d}u .$$

Now the imaginary part of Λ can be obtained by using the formula

$$\int_0^\infty K_0[\gamma\sqrt{x^2+\beta^2}]\cos(xy)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\pi(y^2+\gamma^2)^{-1/2}\exp[-\beta\sqrt{(y^2+\gamma^2)}]$$

where

$$\gamma > 0, \quad \mathrm{Re}\,\beta > 0.$$

Thus

$$\mathrm{Im}\,\Lambda = -\frac{1}{\alpha}\sqrt{1+\lambda^2}\int_0^\infty K_0[\sqrt{\alpha^2+u^2}]\cos\lambda u\,\mathrm{d}u$$

$$= -\frac{\pi}{2\alpha}\exp[-\alpha\sqrt{1+\lambda^2}].$$

The real part of Λ is given by

$$\mathrm{Re}\,\Lambda = \frac{1}{\alpha}\sqrt{1+\lambda^2}\int_0^\infty K_0[\sqrt{\alpha^2+u^2}]\sin\lambda u\,\mathrm{d}u.$$

In order to carry out the integration we use the definitions

$$K_0(z) = \int_0^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t^2+z^2}}\,\mathrm{d}t.$$

$$\frac{1}{\sqrt{t^2+z^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty \exp\left[-\frac{1}{2}x^2(t^2+z^2)\right]\mathrm{d}x$$

and record the integral in the form

$$\mathrm{Re}\,\Lambda = \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\alpha}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \sin(\lambda u)\,\mathrm{d}u\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}x \times\int_0^\infty \exp\left[-\frac{1}{2}x^2(t^2+\alpha^2+u^2)\right]\cos t\,\mathrm{d}t$$

$$= \sqrt{1+\lambda^2}\,\frac{1}{2\alpha}\int_0^\infty \sin\lambda u\,\mathrm{d}u \times\int_{-\infty}^\infty \exp\left[-\frac{1}{2}x^2(\alpha^2+u^2)\right]|x|^{-1}\exp\left(-\frac{1}{2}x^{-2}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\alpha}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x}\exp\left(-\frac{1}{2}\alpha^2x^2-\frac{1}{2}x^{-2}\right) \times\int_0^\infty \exp\left(-\frac{1}{2}x^2u^2\right)\sin\lambda u\,\mathrm{d}u$$

where we used

$$\int_0^\infty \exp\left(-\frac{1}{2}x^2t^2\right)\cos t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}\,\frac{1}{|x|}\exp\left(-\frac{1}{2}x^{-2}\right).$$

Hence, using

$$\int_0^\infty \exp\left(-\frac{1}{2}x^2u^2\right)\sin\lambda u\,\mathrm{d}u = x^{-2}\exp\left(-\frac{1}{2}\lambda^2x^{-2}\right)\int_0^\lambda \exp\left(\frac{1}{2}u^2x^{-2}\right)\mathrm{d}u$$

and the Laplace transformation (together with the substitution $x=t^{-1/2}$)

$$\int_0^\infty \mathrm{d}t\exp\left(-\frac{1}{4}at^{-1}\right)\exp(-pt) = \sqrt{a}\,p^{-1}K_1[\sqrt{ap}],$$

we obtain the result

$$\mathrm{Re}\,\Lambda = \sqrt{1+\lambda^2}\int_0^\lambda \mathrm{d}u\,\frac{K_1[\alpha\sqrt{1+\lambda^2-u^2}]}{\sqrt{1+\lambda^2-u^2}}.$$

This can also be written as

$$\mathrm{Re}\,\Lambda = \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\alpha\lambda}\left[K_0(\alpha) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\int_0^\lambda K_0(\alpha\sqrt{1+\lambda^2-u^2})\,\mathrm{d}u\right].$$

Hence comparing with Eq. (3.37) we get

$$\mathrm{Re}\,I = \int_0^\lambda K_0[\alpha\sqrt{1+\lambda^2-u^2}]\,\mathrm{d}u.$$

Finally from Eq. (3.27) we find that

$$\mathrm{Re}\,I_0 = \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{ck\,K_2(\alpha)}\int_0^\lambda [zK_1(z)+K_2(z)]\,\mathrm{d}u,$$

where

$$z = \alpha\sqrt{1+\lambda^2-u^2}.$$

We give the integrals $I_\mu{}^\gamma$ and I_3 used in the paper. By using spherical polar coordinates with the wave vector $\mathbf{k}$ as the polar axis, it is easily seen that

$$I_1 = I_2 = 0$$

and

$$I_3 = \frac{2\pi}{c}A\int \frac{p^3\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta}{k_0\sqrt{p^2+m^2c^2}-pk\cos\theta} \times\exp\left(-\alpha\sqrt{1+\frac{p^2}{m^2c^2}}\right)\mathrm{d}p.$$

Hence

$$I_3 = -\frac{1}{ck}\frac{\alpha}{K_2}\int_0^\infty \mathrm{d}\varphi\cosh\varphi\sinh^2\varphi\exp(-\alpha\cosh\varphi) + \frac{1}{2ck}\frac{\alpha}{K_2}\int_{-1}^1\int_0^\infty \frac{\mu\cosh^2\varphi\sinh^2\varphi}{\mu\cosh\varphi-x\sinh\varphi}\exp(-\alpha\cosh\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}x$$

$$= \mu I_0 - \frac{1}{kc}. \qquad \text{(A.1.1)}$$

The integrals

$$I_\mu{}^\gamma = -\int \frac{p^\gamma p_\mu}{(k_\alpha p^\alpha)^2}\varrho_m\,\mathrm{d}^4p \qquad \text{(A.1.2)}$$

could not be obtained by a partial differentiation of I^γ with respect to k^μ since in that case we could not have used the spherical polar coordinates in the above form. Thus in spherical polar coordinates, as chosen in the above, it is easy to see that

$$I_2^1 = I_2^1 = I_3^1 = I_1^3 = I_3^2 = I_2^3 = I_4^1 = I_1 = I_2^4 = I_4^2 = 0.$$

The only non-vanishing integrals are

$$I_1^1,\ I_2^2,\ I_3^3,\ I_4^4,\ I_3^4,\ I_3^4,$$

where

$$I_1^1 = I_2^2,\ I_4^3 = -I_3^4.$$

Now,

$$\frac{1}{c} I_1^1 = \frac{1}{c}\int \frac{{p_1}^2}{(k_\alpha p^\alpha)^2} \varrho_m \,\mathrm{d}^4 p$$

$$= -\pi A \frac{\partial}{\partial \omega}\int\int \frac{p^4}{\sqrt{p^2+m^2c^2}} \times \frac{\sin^3\theta \exp\left[-\alpha\left(1+(p/mc)^2\right)^{1/2}\right]}{k_0\sqrt{p^2+m^2c^2}-kp\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}p$$

$$= -\pi A \frac{\partial}{\partial\omega}\int_0^\infty \mathrm{d}p \int_{-1}^{1} \frac{p^4}{\sqrt{p^2+m^2c^2}} \times \frac{(1-x^2)\exp\left[-\alpha\left(1+(p/mc)^2\right)^{1/2}\right]}{k_0\sqrt{p^2+m^2c^2}-kpx}\,\mathrm{d}x.$$

There are two terms to be integrated. The first term is

$$L_1 = \int_0^\infty \mathrm{d}p \int_{-1}^{1} \frac{p^4}{\sqrt{p^2+m^2c^2}} \frac{\exp\left[-\alpha\left(1+(p/mc)^2\right)^{1/2}\right]}{k_0\sqrt{p^2+m^2c^2}-kpx}\,\mathrm{d}x$$

$$= (mc)^3 \int_0^\infty \mathrm{d}\varphi \int_{-1}^{1} \frac{\sinh^2\varphi\,(\cosh^2\varphi-1)\exp(-\alpha\cosh\varphi)}{k_0\cosh\varphi - kx\sinh\varphi}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{(mc)^3}{k}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\alpha^2}\int_0^\infty \mathrm{d}\varphi \sinh^2\varphi \exp(-\alpha\cosh\varphi) \times \int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\mu\cosh\varphi - x\sinh\varphi}$$

$$-\frac{(mc)^3}{k}\int_0^\infty \mathrm{d}\varphi \sinh^2\varphi\exp(-\alpha\cosh\varphi)\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\mu\cosh\varphi - x\sinh\varphi}$$

$$= 2\frac{(mc)^3}{k}\frac{\mathrm{d}^2 A}{\mathrm{d}\alpha^2} - 2A\frac{(mc)^3}{k}.$$

The integration of the second integral

$$L_2 = \int\int_{-1}^{1} \frac{p^4}{\sqrt{p^2+m^2c^2}} \frac{x^2\exp\left[-\alpha\left(1+(p/mc)^2\right)\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}p}{\mu\sqrt{p^2+m^2c^2}-px}$$

can be carried through in the same way by noting that

$$\int_{-1}^{1}\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\mu\sqrt{p^2+m^2c^2}-px} = \frac{\mu^2(p^2+m^2c^2)}{p^3} \times \log\left(\frac{\mu\sqrt{p^2+m^2c^2}+p}{\mu\sqrt{p^2+m^2c^2}-p}\right) - \frac{2\mu\sqrt{p^2+m^2c^2}}{p^2}.$$

Hence we obtain

$$L_2 = \mu^2\int_0^\infty p\sqrt{p^2} + m^2c^2 \log\left[\frac{\mu\sqrt{p^2+m^2c^2}+p}{\mu\sqrt{p^2+m^2c^2}-p}\right] \times \exp\left[-\alpha\sqrt{1+(p/mc)^2}\right]\mathrm{d}p$$

$$-2\mu\int_0^\infty p^2\exp\left[-\alpha\sqrt{1+(p/mc)^2}\right]\mathrm{d}p$$

$$= 2\mu^2(mc)^3\frac{\mathrm{d}^2 A}{\mathrm{d}\alpha^2} + 2\mu(mc)^3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(\frac{K_1}{\alpha}\right).$$

Finally we get

$$I_1^1 = -\frac{1}{2k^2} + \frac{c^2}{2}\frac{\partial}{\partial\omega}\left[(\mu^2-1)I_0\right] + \frac{\alpha c}{2kK_2}\frac{\partial A}{\partial\omega}. \tag{A.1.3}$$

The integration of the remaining integrals is straightforward; they are given by

$$I_3^3 = \frac{1}{k^2} - c^2\frac{\partial}{\partial\omega}(\mu^2 I_0) \tag{A.1.4}$$

$$I_4^4 = c^2\frac{\partial I_0}{\partial\omega} \tag{A.1.5}$$

$$I_4^3 = -c^2\frac{\partial I_3}{\partial\omega}. \tag{A.1.6}$$

Appendix 2

The relativistic conductivity tensor is of rank 3 and it has 24 components.

By using the expression for the electromagnetic field of the plasma

$$f_{\mu\nu} = -4\pi\mathrm{i}\frac{k_\mu J_\nu - k_\nu J_\mu}{k_\alpha k^\alpha} \tag{A.2.1}$$

in Eqs. (3.5) and (3.6), we obtain

$$J^\gamma = \frac{1}{c}\Lambda^\gamma_{\mu\nu} f^{\mu\nu} \tag{A.2.2}$$

where $\Lambda^\gamma_{\mu\nu}$ is the conductivity tensor, antisymmetric in the lower indices,

$$\Lambda^\gamma_{\mu\nu} = \frac{\omega_p^2}{8\pi\mathrm{i}}\left[\delta_\nu{}^\mu I_\nu - \delta_\nu{}^\gamma I_\mu + \frac{1}{c}k_\mu I_\nu{}^\gamma - \frac{1}{c}k_\nu I_\mu{}^\gamma\right], \tag{A.2.3}$$

where the only non-vanishing components are

$$\Lambda^1_{41} = \frac{\omega_p^2}{8\pi\mathrm{i}}\left[\frac{\omega}{c^2}I_1^1 - I_0\right] \tag{A.2.4}$$

$$\Lambda^2_{42} = \frac{\omega_p^2}{8\pi\mathrm{i}}\left[\frac{\omega}{c^2}I_2^2 - I_0\right] \tag{A.2.5}$$

$$\Lambda^3_{43} = \frac{\omega_p^2}{8\pi\mathrm{i}}\left[\frac{\omega}{c^2}I_3^3 - \frac{k}{c}I_4^3 - I_0\right] \tag{A.2.6}$$

$$\Lambda^4_{43} = \frac{\omega_p^2}{8\pi\mathrm{i}}\left[I_3 + \frac{\omega}{c^2}I_3^4 - \frac{k}{c}I_4^4\right] \tag{A.2.7}$$

$$\Lambda^1_{31} = \frac{\omega_p^2}{8\pi\mathrm{i}}\left[\frac{k}{c}I_1^1 - I_3\right] \tag{A.2.8}$$

$$\Lambda^2_{23} = -\frac{\omega_p^2}{8\pi\mathrm{i}}\left[\frac{k}{c}I_2^2 - I_3\right]. \tag{A.2.9}$$

In non-relativistic limit we have

$$I_0 \to I_0^N$$

$$\frac{1}{c} I_4^3 = \frac{1}{c^2} I_1^1 = \frac{1}{c^2} I_2^2 = \frac{1}{c^2} I_3^3 = I_3 = 0 .$$

The non-relativistic limit of the equations (A.2.2), as follows from the definition of J_μ, must be understood to mean

$$\lim_{c\to\infty} J_0 = \text{Non-relativistic charge density}$$

$$\lim_{c\to\infty} (cJ) = \text{Non-relativistic current density.}$$

Hence, using (A.2.2) and the results

$$\operatorname{Lim} \Lambda_{41}^1 = \operatorname{Lim} \Lambda_{42}^2 = \operatorname{Lim} \Lambda_{43}^3 = \frac{\mathrm{i}}{8\pi} \omega_p^2 I_0^N$$

$$\operatorname{Lim} \Lambda_{31}^1 = \operatorname{Lim} \Lambda_{23}^2 = 0 , \qquad \text{(A.2.10)}$$

we obtain

$$J_0 = -\frac{\mathrm{i}\,\omega_p^2}{4\pi} \frac{\partial I_0^N}{\partial \omega} k E_z$$

$$= -\frac{\mathrm{i} n e^2}{m} \frac{\partial I_0^N}{\partial \omega} \mathbf{k}\cdot\mathbf{E} \qquad \text{(A.2.11)}$$

and

$$J = -\frac{\mathrm{i}\,\omega_p^2}{4\pi} I_0^N E$$

$$= -\frac{\mathrm{i} n e^2}{m} I_0^N E. \qquad \text{(A.2.12)}$$

Because of the Landau damping the scalar conductivity

$$\sigma_c = -\frac{\mathrm{i} n e^2}{m} I_0^N \qquad \text{(A.2.13)}$$

is complex. The complex value of the conductivity refers to the reactive properties of the medium. From the definition of I_0^N it follows that at the absolute zero ($T=0$) we have $I_0^N(T=0) = 1/\omega$ and in this case

$$(\sigma_c)_{T=0} = -\frac{\mathrm{i} n e^2}{m} \qquad \text{(A.2.14)}$$

is pure imaginery. This corresponds to the complete reactivity of the medium.

For the relativistic plasma the medium has an unisotropic conductivity.

References

[1] KLIMONTOVICH, YU. L., *Zhur. Eksptl. i Teoret. Fiz.* **37** (1960) 524.
[2] SIMON, A., HARRIS, E. G., *Phys. Fluids* **3** (1960) 245.
[3] DRUMMOND, W., ROSENBLUTH, M. N., *Phys. Fluids* **3** (1960) 45.
[4] GOTO, K., *Prog. Theor. Phys.* (*Kyoto*) **20** (1958) 1.
[5] WATSON, K. M., BLUDMAN, S. A., ROSENBLUTH, M. N., *Phys. Fluids* **3** (1960) 741.
[6] SPITZER, L., Physics of Fully Ionized Gases (Interscience, New York, 1956) 105 p.
[7] PAULI, W., Theory of Relativity (Pergamon Press, London, 1958): page 140.
[8] CLEMMOW, P. C., WILSON, A. J., *Proc. Roy. Soc.* (*London*) **A 237** (1956) 117.
[9] VAN KAMPEN, N. G., *Physica* **23** (1957) 641.
[10] VLASOV, A., *J. Phys. USSR* **9** (1945) 25.
[11] LANDAU, L., *J. Phys. USSR* **10** (1946) 25.
[12] BOHM, D., GROSS, E. P., *Phys. Rev.* **75** (1947) 1851.
[13] BERZ, F., *Proc. Phys. Soc.* **69** B (1956) 939.
[14] SAKAMOTO, S., *Ber. Verhandl. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Naturwiss. Kl.* **80** (1928) 217.
[15] TONKS, L., LANGMUIR, I., *Phys. Rev.* **33** (1929) 195.
[16] BERNSTEIN, I. B., TREHAN, S. K., *Nuclear Fusion* **1** (1960) 3.
[17] BUNEMAN, O., *Phys. Rev.* **112** (1958) 1504.

(Manuscript received 13 February 1961, revisions received 13 June 1961)

NUCLEAR FUSION 1 (1961)

ACCELERATION OF PLASMA BY TRAVELING ELECTROMAGNETIC WAVES

JACK KATZENSTEIN*

DEPARTMENT OF PHYSICS, UNIVERSITY OF NEW MEXICO

ALBUQUERQUE, NEW MEXICO, U.S.A.

A type of plasma accelerator is proposed in which the plasma is confined in a magnetic field in the form of an accelerating cusp, the confinement resulting from the combined action of the magnetic field and the equivalent gravitational field of the acceleration. The accelerating cusp is produced by a transient wave on a suitable transmission line of constant characteristic impedance and increasing velocity of propagation. Such a transmission line is in the form of a tapered solenoid suitably loaded with distributed capacitance to preserve constant characteristic impedance. An order-of-magnitude calculation of the performance of such a line is made and it is found that a line 3 meters long with a characteristic impedance of 12.6 ohms and an applied voltage of 300 kV can accelerate 10^{17} deuterons to 50 keV energy. Several possible experiments on the confinement of hot plasmas using such an accelerator are described.

1. Introduction

A current approach to the problem of controlled fusion due to J. L. TUCK [1] known as "entropy trapping" proposes to heat and contain a plasma by accelerating a relatively cold plasma to a high directed velocity and injecting it into a cusped magnetic field configuration known as a "picket fence". The directed energy of the plasma is randomized by repeated collisions with the convex magnetic field and is thus converted to thermal internal energy. (We propose the term "convex magnetic field" to indicate a field whose lines of force are everywhere convex toward a trapped body of plasma. This is to be contrasted with the current rather imprecise nomenclature "cusped geometry" or "cusped magnetic field"). Plasma configurations confined by such convex magnetic fields have been shown by BERKOWITZ, GRAD and RUBIN [2] to be hydromagnetically stable. Repeated injections of accelerated plasma should build up a high-β plasma in a stable confining field.

A difficulty with this experiment lies in the methods hitherto employed to generate and accelerate the plasmas. To achieve plasma temperatures of the order of 10 keV plasma velocities of the order of 10^8 cm/s are required. Existing acceleration techniques as proposed by MARSHALL [3], BOSTICK [4], HARTMAN, COLGATE and MUNGER [5], etc., achieve velocities of the order of 10^7 cm/s which, if thermalized, lead to temperatures of hundreds of volts. This critical factor of ten in velocity and one hundred in ion energy seems to be inaccessible by the methods of the above authors. Further, the acceleration techniques do not contain the plasma during the acceleration process or during transit time from the accelerator to the thermalizing field configuration. Free expansion of the plasma reduces its temperature and permits a large amount of recombination to occur. The resulting lowered conductivity reduces the containment time of the plasma in the thermalizing field, while the presence of large numbers of cold neutral atoms result in a disastrous loss of energy through charge exchange. The method of plasma acceleration proposed in this report avoids these difficulties. The method is the containment of plasma by a magnetic field in the shape of an accelerating cusp, the accelerating cusp being achieved by a traveling wave on a suitably shaped transmission line. The plasma is effectively contained by a combination of a convex magnetic field and an equivalent gravitational field, the latter arising from the acceleration of the magnetic field.

This idea was investigated first by THONEMANN, COWHIG and DAVENPORT [6] and by MARSHALL [7]. The results of the latter's experiment were somewhat inconclusive as the phase velocity of the traveling wave was the same order of magnitude as that of the injected plasmoid so there was some question as to whether the plasmoid acquired additional kinetic energy from the field. As will be apparent in the following analysis, a device on the scale of Marshall and operating at this relatively low voltage of 20 kV could not be expected to exceed in performance the various types of plasma guns and for this reason the traveling wave accelerator was abandoned by him in favor of a gun in which the plasma is driven by an accelerating sheath.

2. Order-of-magnitude calculation

We wish to obtain an estimate of the number of ions N of mass m that a transient traveling wave of voltage V traveling on a transmission line of characteristic impedance Z_0, initial phase velocity v_1 and final phase velocity v_2 can accelerate over this range of velocity. The transmission line will be in the form of a gradually tapered solenoid suitably loaded with distributed capacitance in order to preserve constant

* Present address: Laboratorio Gas Ionizzati (Euratom-C.N.E.N.), Frascati, Italy.

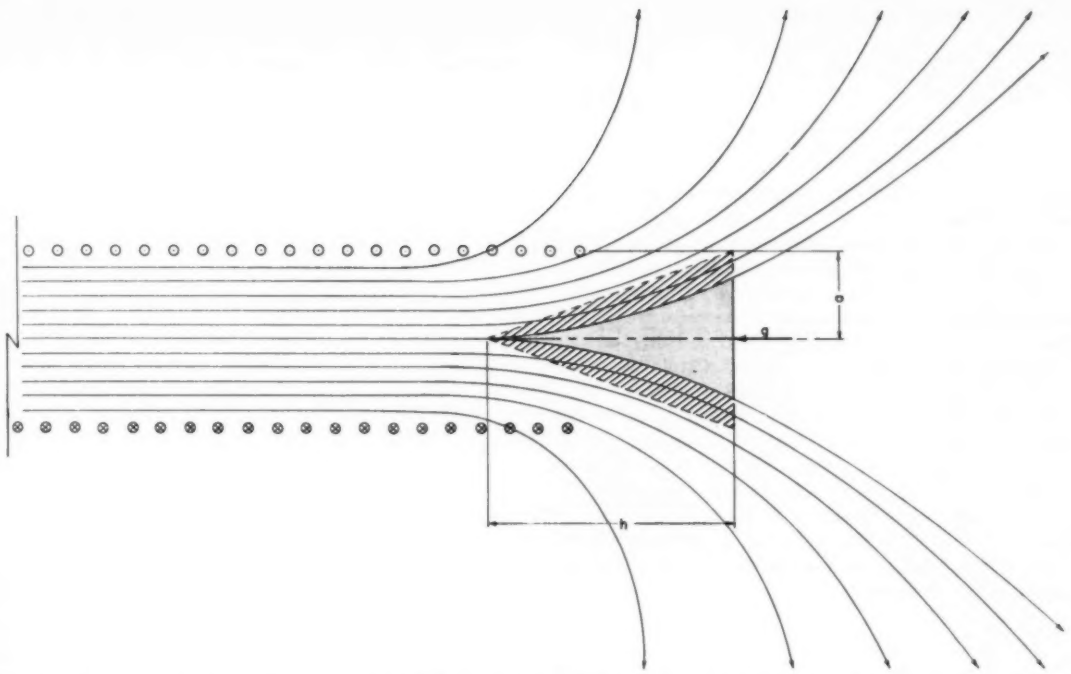


Fig. 1 The approximate configuration of the plasmoid in the field of a semi-infinite solenoid. The shaded area shows the outline of the equivalent conical plasmoid used in calculations.

characteristic impedance. The exact configuration of the line will be calculated later. Since the taper of the solenoid required for constant acceleration is very gradual, we will assume the field at the end of it is that at the end of a semi-infinite solenoid. The plasma under acceleration is assumed to form a perfectly diamagnetic plasma body (plasmoid) held in the magnetic field at the end of a semi-infinite solenoid by the equivalent gravitational field of the acceleration.

We assume that the plasmoid is an axially-symmetric spindle-shaped body somewhat as is shown as the dark outline in Fig. 1. Taking a cylindrical coordinate system with the z axis coincident with the axis of the solenoid and the origin at the lowest point of the plasmoid we assume that the radius of the plasmoid, r is an unknown function $r(z)$ of the distance from the lowest point. If this function be known, then an exact solution of the problem is possible; since it is not known the solution must be expressed in terms of an undetermined factor γ, a definite integral over $[r(z)]^2$. An upper limit to γ is 1/3 which assumes that the plasmoid is incompressible and conical with a radius a equal to the solenoid radius and a length h as shown by the shaded outline in Fig. 1.

We seek the hydrostatic pressure p_0 at the bottom of the plasmoid. Assume a barometric distribution of density corresponding to an isothermal plasmoid, i.e. $\varrho = \varrho_0 \exp(-z/h)$ where ϱ_0 is the mass density of of the plasma at the bottom of the plasmoid and $h = kT/mg$ the so-called barometric scale height. The pressure is then $p_0 = \varrho_0 g h$. To compute ϱ_0 we obtain the total mass of the plasmoid M by integration

$$M = Nm = \varrho_0 \int_0^\infty e^{-z/h} \pi [r(z)]^2 \, dz. \tag{1}$$

Introducing the dimensionless variables $\zeta = z/h$ and $\xi = r/a$ we obtain:

$$M = \varrho_0 \pi a^2 h \int_0^\infty e^{-\zeta} \xi^2(\zeta) \, d\zeta. \tag{1a}$$

Calling the definite integral γ and equating the hydrostatic and magnetic pressures, we obtain

$$p_0 = \frac{Nmg}{\gamma \pi a^2} = \frac{B^2}{2\mu_0}, \tag{2}$$

where B is the maximum value that the magnetic field can assume. In our case this is the magnetic field of a semi-infinite solenoid at a point far removed from its end, i.e. $B = \mu_0 I/d$ where I is the current flowing in the solenoid and d the distance between turns. μ_0 has its usual meaning as the permeability of free space in the rationalized MKS system of units which we adopt.

If the acceleration is constant, $g = v_2^2/2S$ where v_2 is the final velocity of the plasmoid—also the final phase velocity of the traveling wave if the plasma is diamagnetic (neglecting v_1^2 compared to v_2^2). The

pressure balance equation then reads:

$$\frac{Nm}{\gamma\pi a^2}\frac{v_2^2}{2S}=\frac{1}{2}\mu_0\frac{I^2}{d^2},$$

or

$$N=\frac{\gamma}{2}\frac{S}{E_k}\left(\frac{\mu_0\pi a^2}{d^2}\right)I^2, \tag{3}$$

where N is the number of particles accelerated to kinetic energy E_k.

The quantity in paranthesis is the inductance per unit length L' of an infinite solenoid. In an accelerator of this type a/d will be a function of x, the distance along the solenoid, decreasing so as to increase the phase velocity of the wave. For our design, d, which is approximately twice the parallel-plate spacing of the distributed capacitance, is kept constant.

We will specify all quantities which refer to the output or high-speed end of the accelerator by the subscript 2 and quantities refer to the input or low-speed end of the accelerator by subscript 1. To obtain the upper limit on N we use the smallest value of L' i.e. L_2'. The inductance per unit length of the line is related to the phase velocity and the characteristic impedance Z_0 by

$$v=\frac{Z_0}{L'};$$

hence:

$$v_2=\frac{Z_0}{L_2'}. \tag{4}$$

Substituting, we obtain the number of particles that can be accelerated by the line:

$$N=\frac{\gamma}{2}\frac{s}{E_k v_2}\frac{V^2}{Z_0}, \tag{5}$$

where V is the voltage of the traveling wave, i.e. $V=IZ$.

As an example, consider deuterons of 50 keV energy. v_2 is 2.24×10^6 m/s. If we take $Z_0=12.6$ ohms and $V=300$ kV, $s=3$ meters and assume $\gamma=1/3$, the total number of particles that can be accelerated is $N=2\times10^{17}$. It is seen that such an accelerator must of necessity operate at very high voltage. The efficiency of the line is calculated for two conditions of operation. If a wave is launched by discharging a condenser bank into the line then the energy input is given by $VI\tau$ where τ is the wave transit time. Thus the efficiency η is given by

$$\eta=\frac{NE_k}{VI\tau}=\frac{\gamma}{4}. \tag{6}$$

If the line is initially charged to voltage V, then the input energy is $CV^2/2$, where C is the total capacitance of the line and

$$\eta=\frac{\frac{\gamma}{2}\frac{s}{v_2}\frac{V^2}{Z_0}}{CV^2/2}=\frac{\frac{\gamma}{2}\frac{s}{v_2}\frac{V^2}{Z_0}}{(\tau/Z_0)V^2/2}=\frac{\gamma}{2}. \tag{7}$$

The fraction of energy converted into particle energy is thus twice as large for the latter case, as in the former case half the input energy is stored as electrostatic energy in the line. For $\gamma=1/3$ the maximum efficiency of the accelerator is thus seen to be $\eta=1/6$ or about 16%.

The characteristic impedance of the line is now calculated. The appearance of the line is shown in Fig. 2. It is essentially a parallel plate capacitor in the form of a long tapering strip which is spirally wound edgewise on a mandrel. The capacitance per unit length is calculated as a parallel plate condenser. The plate area per turn is $\pi(R^2-a^2)$ and the plate spacing is $d/2$. K is the dielectric constant of the dielectric between the plates. The condenser plates and possibly the return current cylinder will be slotted to prevent tangential currents from flowing and thus permit the return flux to penetrate these structures immediately.

$$C'=\frac{4\pi\varkappa_0 K(R^2-a^2)}{d^2} \tag{8}$$

$$Z_0=\left(\frac{L'}{C'}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{\mu_0}{\varkappa_0}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2K^{1/2}}\frac{(a^2/R^2)^{1/2}}{[1-(a^2/R^2)]^{1/2}}\approx\frac{188.5}{K^{1/2}}\frac{a}{R}. \tag{9}$$

Thus, if the ratio of the inner and outer radii of the turns is kept constant, the characteristic impedance will be constant.

Let us obtain the physical size of the machine previously considered.

$$L_2'=\frac{\mu_0\pi a_2^2}{d^2}=5.62\times10^{-6}\text{ henries/meter}.$$

If we keep d constant and equal to 2.5 cm, $a_2=3$ cm. If we assume a plasmoid injected at 2.24×10^5 m/s, i.e., a velocity increase of ten to one we get for $a_1=(10)^{1/2}a_2=9.5$ cm. If we assume polyethylene ($K=2.25$) for the dielectric, we get for Z_0:

$$Z_0=125.7\,a/R.$$

For $Z_0=12.6$ ohms, then $R=95$ cm. The machine is thus 190 cm in diameter at its large end, 60 cm in diameter at its small end and 300 cm long, a sizeable apparatus.

The profile of the machine is easily obtained from the condition that the acceleration be constant:

$$g=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \tag{10}$$

or since

$$v=\frac{Z_0}{L'}=\frac{Z_0}{\pi\mu_0 a^2/d^2}=\frac{k}{a^2},$$

$$g=\frac{-2k^2}{a^5}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}x}=\text{const.} \tag{11}$$

Thus $a\sim1/x^{1/4}$; the equation of the profile is seen to be

$$s=\frac{a_1 a_2[s/(a_1^4-a_2^4)]^{1/4}}{[x+a_2^4\,s/(a_1^4-a_2^4)]^{1/4}}. \tag{12}$$

The large size of the apparatus raises one question as to how the apparatus can be scaled. Call λ the

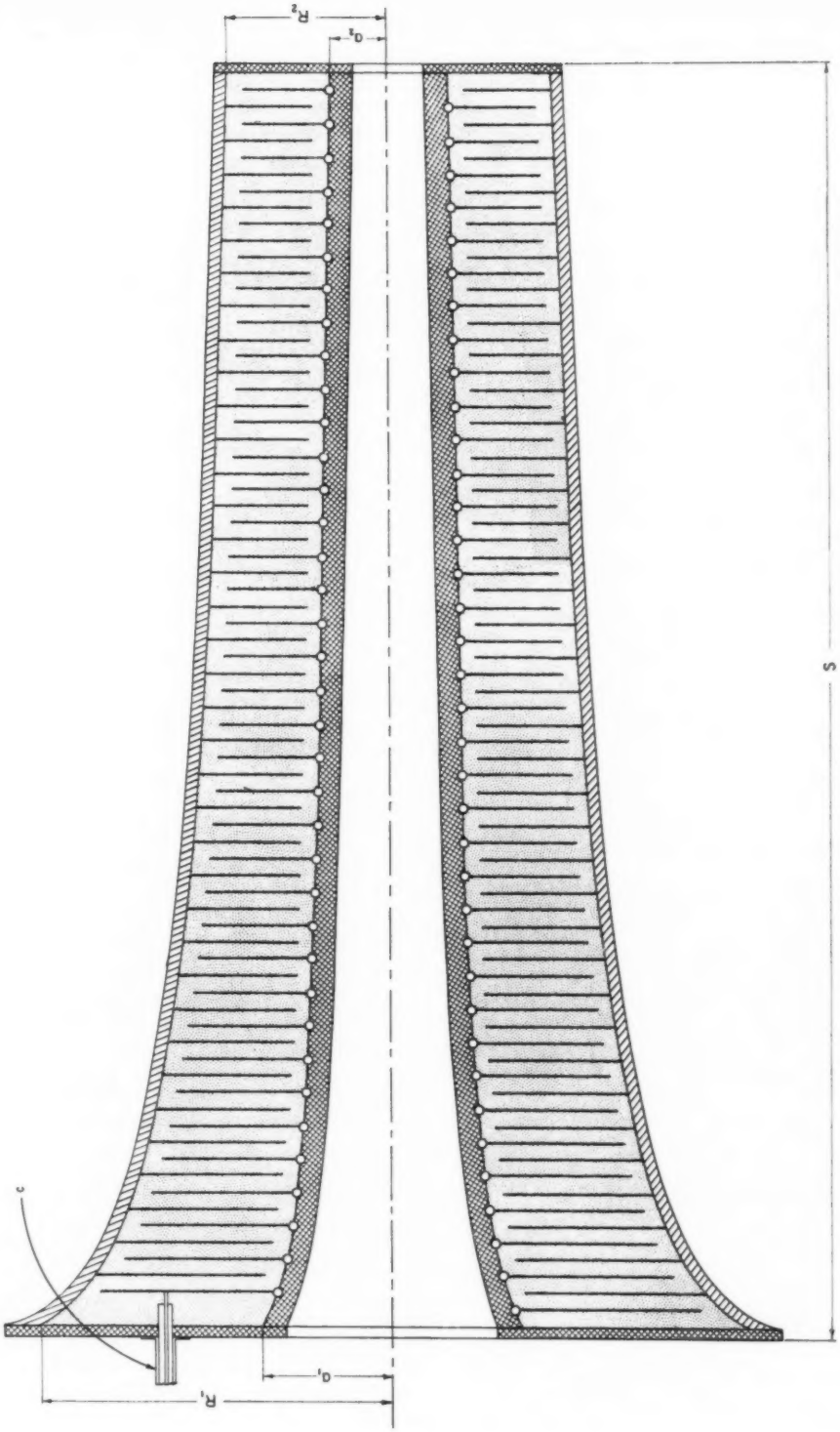


Fig. 2 Diagram of the traveling wave accelerator. The proportions are those of a 50-ohm line designed for a velocity ratio of 10 and final velocity of 10^8 m/s. C is the charging cable. The symbols A_1, R_1, S etc., are the dimensions of the line as mentioned in the text.

ratio of final to initial velocity. We can rearrange Eq. (5) as follows:

$$N = \frac{\gamma}{2}\frac{s}{E_k \lambda}\frac{L_1'}{Z_0}\frac{V^2}{Z_0} \tag{13}$$

$$= \frac{\gamma}{2}\frac{s}{E_k} C'_1 V^2 .$$

Now

$$C_1' = \frac{4\pi\varkappa_0 K}{d^2} R_1^2 \left(1 - \frac{a_1^2}{R_1^2}\right). \tag{14}$$

So

$$N = \frac{\varkappa_0 K \gamma}{2 E_k \lambda} (\pi R_1^2 s)\left(1 - \frac{a_1^2}{R_1^2}\right)\left(\frac{2V}{d}\right)^2. \tag{15}$$

The quantity $2V/d$ is just the voltage gradient on the insulation of the line. We have used a value of 600 V/mil (240 kV/cm) which is about the limit of polyethylene and about as high a voltage gradient as can be borne by conventional materials in thicknesses of a half inch or greater. The use of pressurized sulfur hexafluoride or some of the gaseous or liquid fluorocarbons might permit raising this figure somewhat, but for practical purposes the dielectric strength of 600 volts/mil is an upper limit.

We note that the number of particles that can be accelerated to a given final energy through a given velocity ratio is proportional to the dielectric constant of the insulator. This suggests the possibility of using a water dielectric as was successfully demonstrated by SCHERRER [8]. The dielectric strength of water is quite high for short intervals following the application of the potential. It is possible to use a traveling wave line so that the potential will be applied to the line for only two transit times, a few microseconds. With a dielectric constant of 80 there is the promise of increasing by two orders of magnitude the number of particles that can be accelerated by a line of given size.

The factor $\pi R_1^2 s$ is proportional to the total volume of the machine. Thus, the number of particles accelerated to a final energy E_k through a ratio of velocities λ is dependent on the volume of the machine. Scaling down the machine in size thus rapidly decreases the number of particles that can be accelerated. For an initial study of the acceleration principle it would be desirable to be somewhat less ambitious regarding the final energy and final velocity. So that the acceleration principle should be subject to a fair test, the final velocity and energy should be chosen larger than that which can be obtained with conventional plasma accelerators. Accordingly, we take $v_2 = 10^6$ m/s which corresponds $E_k = 10$ keV for deuterons, and a velocity ratio of 5. Take Z_0 now to be 50 ohms. The $L'_2 = 5 \times 10^{-5}$ henries/m and $(a_2/d)^2 = 12.63$, $a_2 = 9$ cm and $a_1 = (5)^{1/2} a_2 = 20$ cm. Again assuming polyethylene as the dielectric ($K = 2.25$),

$$Z_0 = 50 \text{ ohm} = \frac{188.5}{1.5}\left[\frac{(a/R)^2}{1-(a/R)^2}\right]^{1/2} \tag{16}$$

$$a/R = 0.37$$

$$R_2 = 24.3 \text{ cm}, \quad R_1 = 54 \text{ cm}.$$

The number of particles such a machine 2 m long can accelerate if $V = 300$ kV is $\sim 10^{17}$.

There are certain practical advantages to a high impedance plasma accelerator in addition to its smaller physical size. The current is lower, hence the requirements of structural strength are less severe. Also, if the traveling wave be launched by discharging a condenser bank into the line, the bank can be smaller and no special precautions regarding its parasitic inductance need be taken. We will discuss this matter more thoroughly in Section 4 of this paper.

The above design, in which the capacitance as well as the inductance is continuously distributed, is by no means the only one for such a traveling wave plasma accelerator. If capacitors of suitable size and voltage rating are available, they can be distributed at proper intervals along the tapered solenoid so as to create a line of variable velocity of propagation but constant characteristic impedance. Also, since the velocity of propagation depends on the ratio of d to a the solenoid could be of constant radius but variable spacing which may simplify construction of the line.

3. Stability considerations

The plasma-field configuration of Fig. 1 should be hydromagnetically stable according to Grad's criterion. Further, there exists a liquid metal analogy to the configuration in the technique of levitation melting [9]. Objections can be raised to applicability of this analogy insofar as leakage through the cusp is prevented by surface tension in the molten metal which would not be present in the case of a plasma. The gross stability of the configuration, however, should be verified by this liquid metal analogy.

A conclusive answer to the stability can be obtained only through a mathematical calculation of the plasma-field boundary. This is the free boundary problem for Laplace's equation, a hitherto unsolved mathematical problem. A study of this problem is underway following the technique employed by KOLODNER [10] in solving the free boundary problem for the heat conduction equation. It is hoped that a technique can be found for numerical calculation of the plasma-field boundary.

4. Experiments involving the acceleration of plasmas with traveling electromagnetic waves

There are basically two methods of launching the traveling wave in the transmission line heretofore described. The first method, which we call type A, consists of discharging a large condenser bank into the low-speed end of the line, the high-speed end of the line being short-circuited to ground. The second method, which we call type B, consists of first charging the line to voltage V then discharging the line to ground through a short circuit at the low-speed end, the line being open-circuited at the high-speed end.

Fig. 3 shows the sequence of operations for type A operation. A wave of current and voltage travels down the line from the low-speed to the high-speed end. As the line is shorted at the high speed end

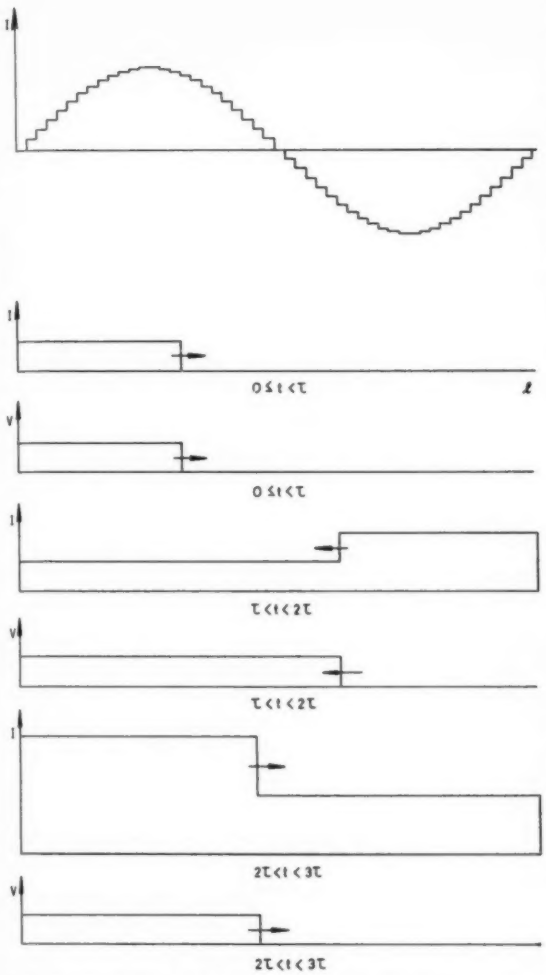


Fig. 3 Action of the line for type A operation.

the current wave is reflected in phase while the voltage wave is inverted. Thus a wave of twice the initial current travels back to the low speed end while the voltage is wiped from the line by the returning voltage wave of opposite phase. The large condenser bank appears as a virtual short and a similar reflection occurs at the low-speed end. The resulting current that flows in the high-speed end of the line is thus a sine wave whose period is just the short-circuit period of the bank which, however, is stepped corresponding to successive reflected waves.

The characteristics of the condenser bank discharged into the line are limited only by the requirement that the rise time of the wave front be small compared to the transit time of the wave. The rise time of the wave is just L_p/Z_0 where L_p is the parasitic inductance of the bank. Hence:

$$L_p/Z_0 \ll \tau = Z_0 C$$
$$L_p \ll L. \tag{17}$$

Thus the parasitic inductance of the condenser bank must be much less than the total line inductance, a condition that is readily fulfilled by a capacitor bank whose units have relatively high parasitic inductance (as the total parasitic inductance of the bank can be reduced by paralleling units).

Fig. 4 shows a possible experiment to be performed with type A operation. Two lines are employed which are identical. The two lines are arranged with their high-speed ends opposite and the bank is discharged into both lines in parallel while simultaneously a plasmoid is injected into both lines at their low-speed ends. The effect is to collide two plasma-bearing cusps and keep them together while raising the magnetic fields. Only a small fraction of the bank energy goes into accelerating the cusps, the remainder being used to raise the strength of the confining convex field.

This experimental arrangement avoids the well-known difficulty that rapidly rising fields are needed to heat plasmas while fields of long duration are needed to confine them. A fraction of the energy of the bank is used to heat the plasma by traveling wave acceleration and subsequent thermalization while the bulk of the bank energy is utilized in producing the confining field of long duration.

Fig. 5 shows an alternate arrangement. The two lines have their currents in the opposite sense. A conducting ring is placed midway between the high-speed ends of the lines. If we assume high enough conductivity so that the flux linking the ring cannot change during the rise time of the fields at the end of the line, the result is to create a so-called "caulked picket fence" field geometry [11]. If the configuration of Fig. 5 is to be achieved, i.e. a high-beta configuration, there must be an initial current circulating in the ring.

Fig. 6 shows the sequence of operations for type B operation. The curve is a plot of voltage on the high-speed end or current flowing out of the low-speed end.

The subsequent reflections of voltage and current waves are shown. Such a line or a pair of them can be used to inject into a continuously maintained confining field as is shown in Fig. 7. The use of a pair of lines is merely to obtain twice the energy and twice the number of particles as is possible with a single line.

Only a small fraction, $\gamma/2$, of the total energy stored in the charged line is converted into particle energy. The remaining energy oscillates between magnetic and electrostatic energy until ohmic losses dissipate it. This remaining energy can be used to accelerate plasmoids which are injected in synchronism with the traveling waves, thus continuously adding to the number of trapped particles to compensate for those lost by leakage. Alternatively, the line may be shorted at the high-speed end shortly after the first traveling wave reaches it, the residual energy of the line remaining magnetic and providing a confining field whose duration is given by the L/R time constant of the line. This last operation is analogous to "crow-barring" a condenser bank after the first quarter-cycle.

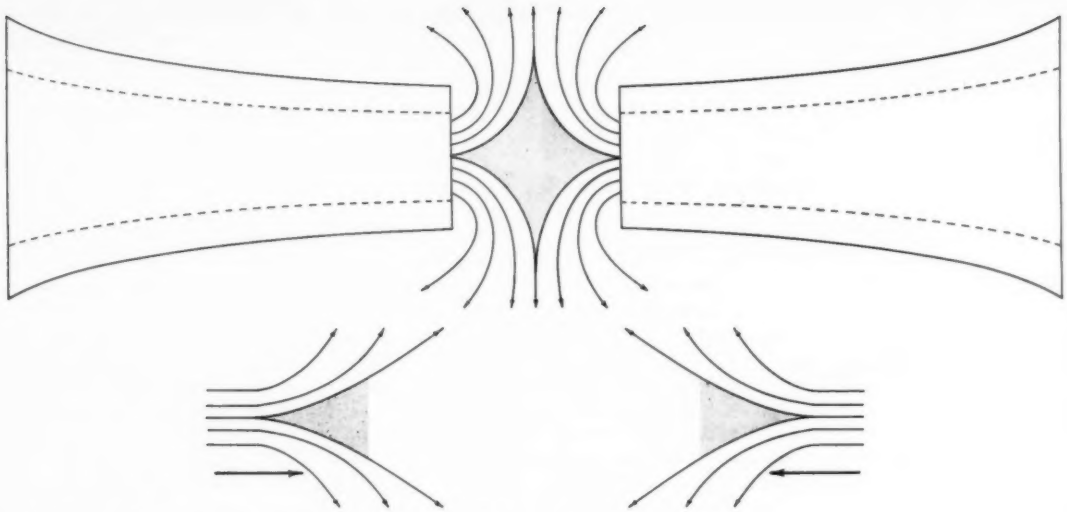


Fig. 4 Use of two lines to form a "picket fence" field configuration.

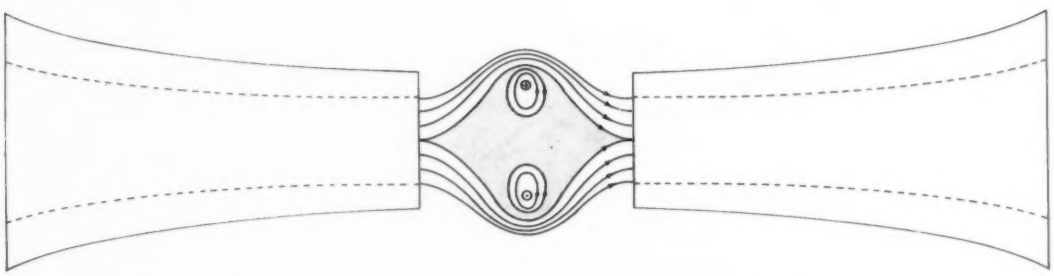


Fig. 5 Use of two lines to form a "caulked picket-fence" field configuration.

Whether type A or type B operation is recommended depends upon the particular experiment planned. Type A operation is obviously necessary if a water dielectric is used, as the dielectric strength of the water is high for only a few microseconds after the potential is applied. If the bank be "crow-barred" after the voltage wave has returned, i.e. two transit times after triggering the bank, then the voltage will be on the line for a time $2\,\tau$ only—which need be only a few microseconds.

As mentioned earlier, the efficiency of the accelerator is twice as large for type B operation. For multiple injection this type of operation should therefore be preferred.

5. Conclusions

The advantages of the traveling-wave plasma accelerator over more conventional methods of accelerating plasma are marked. There is no upper limit in principle to the energy to which the plasma can be accelerated, the plasma is confined in a stable magnetic field configuration during the acceleration process, and the traveling-wave structures lend themselves to the creation of confining field geometries. There is also the prospect that such a plasma accelerator will be "self-cleaning", i.e. will preferentially accelerate light over heavy ions. The electromagnetic containment force will be the same for all singly-ionized particles. The equivalent gravitational field will, of course, act more strongly on the heavy ions. Thus, light and heavy particles will tend to be separated by sedimentation and, if the cusp initially contains more particles than it can accelerate to the final wave velocity, the heavy ions will tend to leak preferentially through the cusp.

The magnitude of this cusp leakage may be calculated for a simple model which assumes that the plasma will stream freely through a circular aperture of radius δ which will be taken equal to the ion Larmor radius. A volume of plasma $\pi\,\delta^2\,S$ will leak out during the acceleration process. If the numerical density at the tip of the cusp is n, the number of particles N' lost in the acceleration process is $n\,\pi\,\delta^2 S$. If the plasma possesses a kinetic temperature $\mathrm{k}T$ the expression for δ is just

$$\delta = \frac{(2\,m\,\mathrm{k}\,T)^{1/2}}{e\,B}. \tag{18}$$

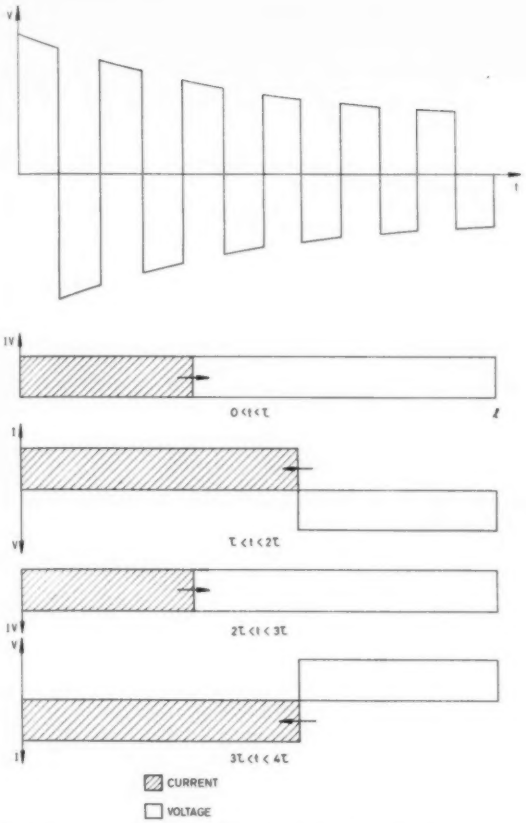


Fig. 6 Action of the line for type B operation.

For equilibrium the kinetic and magnetic pressures must balance; thus

$$n\,\mathrm{k}\,T = \frac{B^2}{2\,\mu_0}. \tag{19}$$

Eliminating kT and calculating N' we get

$$N' = \frac{\pi S\, m}{e^2 \mu_0}. \tag{20}$$

For the acceleration of deuterons by an accelerator 3 m long $N' \sim 10^{18}$. Consider the first described accelerator for accelerating deuterons to 50 kV. The final number of particles is $\sim 10^{17}$. As the number of particles than can be accelerated to velocity v varies as $1/v$ the initial number of particles will be λ greater which for $\lambda = 10$ will be $\sim 10^{18}$. Thus something like the same order of magnitude of particles will be lost by cusp leakage as was initially trapped in the cusp, the number delivered at the final velocity being an order of magnitude less than the number initially trapped.

The above calculation is a crude one, but it probably overestimates the cusp leakage as there is a finite chance that a particle entering the loss aperture will be reflected back into the body of the plasma.

There is the practical economic advantage that the traveling-wave accelerator does not require an energy source of fast capacitors. The rapidly rising magnetic fields required for the acceleration process are produced by the line itself. For type B operation the power supply for charging the line has no requirements except for the ability to produce the current and voltage required. A simple Marx circuit assembled from ordinary surplus oil capacitors and a charging inductor is all that is required. For type A operation the only requirement on the bank driving the line is that its parasitic inductance be small compared with the total line inductance, a condition which likewise can be met by ordinary surplus oil capacitors.

The currents to be switched in the operation of the line are likewise relatively moderate being only a few tens of kiloamperes, which makes feasible the use of spark gaps or ignitrons available within the present state of technology.

Against these advantages must be weighed the two disadvantages of relatively low efficiency and the handling of voltages roughly an order-of-magnitude higher than those of other controlled fusion experiments. The disadvantage of low efficiency would tend to rule out this type of accelerator for plasma propulsion, but is not a real disadvantage for experiments relating to controlled fusion. This is particularly true as the energy that does not appear in the kinetic energy of the plasmoid is not dissipated but remains stored as electrostatic and magnetic energy in the line. This energy may be used to accelerate additional plasmoids or to create a confining magnetic field. The

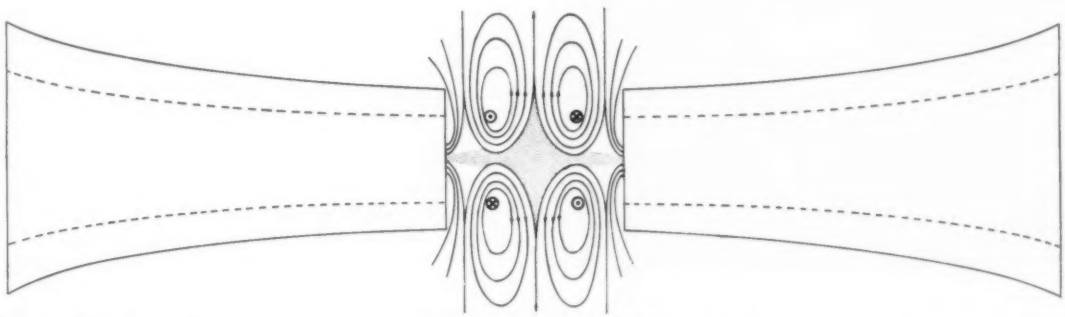


Fig. 7 Use of two lines for injection in a static "picket-fence" field configuration.

efficiency for a single acceleration process is indeed low, but for multiple accelerations the overall efficiency may be quite high.

The disadvantage of high voltage is a technological one. The applied voltage, 300 kV, and dielectric strength of 600 volts/mil are felt to be conservative by present day practices and permit the acceleration of reasonable amounts of plasma by machines which are not too large.

Acknowledgements

The author wishes to thank Dr. James L. Tuck of the Los Alamos Scientific Laboratory for many fruitful discussions and criticisms. Likewise, he is similarly indebted to the other members of Sherwood Division for their opinions, criticisms, and suggestions. This work was supported in part by a contract from the Sandia Corporation.

References

[1] Tuck, J. L. *Phys. Rev. Letters* **3** (1959) 313.
[2] Berkowitz, J., Grad, H., Rubin, H. Proceedings Second U.N. International Conference on Peaceful Uses of Atomic Energy **31** (1958) 177.
[3] Marshall, J. *Phys. Fluids* **3** (1960) 134.
[4] Bostick, W. H. Proceedings Second U.N. International Conference on Peaceful Uses of Atomic Energy **32** (1958) 427.
[5] Hartman, C. W., Colgate, S. A., Munger, R. *Bull. Am. Phys. Soc.*, Series II **5** (1960) 349.
[6] Thonemann, P. C., Cowhig, W. T., Davenport, P. A. *Nature* **169** (1952) 34.
[7] Marshall, J. Proceedings Second U.N. International Conference on Peaceful Uses of Atomic Energy **31** (1958) 341.
[8] Sherrer, V. E., Exploding Wires (Plenum Press, 1959).
[9] Okress, E. C. Wroughton, D. M., Comenetz, G., Brace, P. H., Kelly, J. C. R. *J. App. Phys.* **23** (1952) 545.
[10] Kolodner, I. I. Private Communication.
[11] Tuck, J. L., *Nature* **187** (1960) 863.

(Manuscript received 10 April 1961, revisions received 3 July 1961)

DIAGNOSTICS OF THE CONFINEMENT AND HEATING OF A PLASMA BY A RISING AXIAL MAGNETIC FIELD (ORTHOGONAL PINCH)

J. W. MATHER

UNIVERSITY OF CALIFORNIA, LOS ALAMOS SCIENTIFIC LABORATORY

LOS ALAMOS, NEW MEXICO, U.S.A.

Heating and confinement of a deuterium plasma by a rising axial magnetic field in cylindrical geometry is investigated as a function of applied voltage, mirror ratio (R_m), discharge tube material and tube shape for several scaling geometries at a given aspect ratio $D/L = 0.44$. Diagnostic methods include internal and external magnetic probes, fast streak photography and magnetic flux and neutron measurements. Magnetic probes show the existence of trapped reverse fields and the subsequent intermixing of plasma and field during the second half and later compression cycles. Plasma confinement from the walls during the second and third half discharge cycle is inferred from streak photographs and the duration of neutron production. As the mirror ratio is reduced to ~ 1, the yield and duration of neutron production increases while plasma end streaming is enhanced. Azimuthal asymmetries in the axial field in the mirror are associated with neutron production. Reducing the θ-asymmetry to $\sim 1\,\%$ reduces neutron production by a factor of ~ 3. The main effects of the small field perturbations may be explained in terms of the nonuniform formation and detachment of the current sheath from the discharge tube walls. This can lead to the influx of wall impurities which may account for the lower nuclear yields.

1. Introduction

The "orthogonal pinch" [1], similar to Scylla [2], Thetatron [3], NRL experiment [4], and others [5—9], describes plasma compression by an axial magnetic field in which the radial electromagnetic force ($\mathbf{j} \times \mathbf{B}$) is expressed as the interaction between θ-induced currents (j_θ) and the axial magnetic field (B_z). The equations describing the dynamical behavior of the cylindrical current sheath can be written analogously to those of the "normal pinch" [10] by replacing the electric and magnetic fields of the normal pinch, E_z and B_θ by a similar set, E_θ and B_z.

In 1954, a multiple arrangement of single-turn coils around a spherical bottle 50 cm diam. produced an axial magnetic field of a few kilogauss rising in 5 μs. This experiment, then called the "Jug", [11, 12] demonstrated that a ring current discharge in H_2 was formed near the driving coils within the vacuum chamber subsequently collapsing toward the axis under the radial force $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$. One of the streak photographs taken across the diameter is shown in Fig. 1. This photograph exhibits some of the complex phenomena observed in more recent experiments, namely, that the collapsing luminous front is not singular but, in fact, appears to form several luminous fronts emanating presumably from a single front at intermediate radii. In later experiments, magnetic probes show that the inward moving current sheath develops into several current layers during the compression phase akin to the layers of an "onion", each adjacent layer carrying current in opposite directions.

In 1958, an orthogonal pinch geometry [12] utilizing a single-turn strap 15 cm long and 15 cm diam. was employed with magnetic fields up to 17 kG rising in 5 μs (frequency $\sim$50 kHz). Magnetic probes showed several phenomena, to be discussed later in more detail, namely, 1) the first half-cycle exhibits hydro-

Fig. 1 Transverse streak photograph of a collapsing ring discharge ("Jug") viewed axially. Note several luminous fronts during the later stages of collapse.

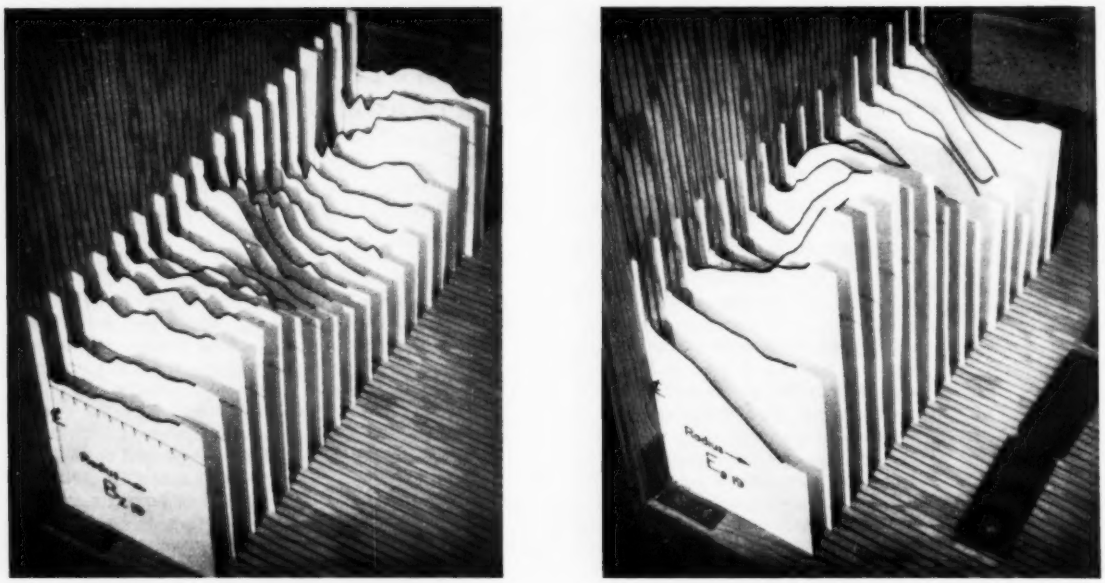


Fig. 2 Axial magnetic field (B_z) and electric field (E_θ) as a function of radius and time. The time axis extends away from the reader with time zero in the foreground. $V_0 = 19$ kV, $\tau/4 \sim 5$ μs, $R_m = 0.7:1$.

magnetic oscillation for D_2 pressure >100 microns, 2) a fraction of the first half-cycle magnetic field is trapped by the plasma, 3) the compression of this trapped field (now reversed in sense to the external driving field direction) during the rising magnetic field of the second half-cycle, and 4) the eventual annihilation or intermixing of the trapped reverse field during the latter portion of the compression cycle. These phenomena occur as well during the third and subsequent half-cycles. Figure 2 shows a typical plot of the magnetic field (B_z) and azimuthal electric field (E_θ) as a function of radius and time for a complete discharge cycle.

It was this experiment that led to further investigation of the magnetic behavior of a plasma that is described in this report. Other diagnostics are employed to supplement the magnetic data.

This report discusses the results of the magnetic field distributions, streak photographs and neutron production for a D_2 plasma in a high current orthogonal pinch geometry as functions of applied voltage, physical dimensions of the driving coil, magnetic mirror ratio, and discharge tube material and shape. These data will also be discussed in terms of plasma confinement and heating and possible causes for the onset of field intermixing as observed by magnetic probes.

2. Experimental arrangement

2.1. Power supply

The condenser bank consists of $10 \sim 20$ kV 15 μF condensers, each connected by a vacuum spark gap [13] and 6 low impedance coaxial cables (~ 10 ohm) to a common cable header. The individual inductances per condenser circuit are: condenser ~ 60 mμH, vacuum spark gap ~ 5 mμH, and coaxial cables ~ 14 mμH; the total is 79 mμH excluding the header of ~ 1 mμH. Under short-circuited conditions at the header, the maximum rate of rise of current is $\sim 2 \times 10^{12}$ amp/s. The bank of condensers, maximum energy of 30 kJ, can be fired over a wide range of applied voltage (100 V to 20 kV) within $\sim 10^{-2}$ μs.

When the condenser bank is operated in conjunction with crowbar*, $\sim 90\%$ of the external circulating current is shunted by the crowbar vacuum switch [13]; this provides an exponential time decay of the current in the external discharge circuit which depends on the load resistance and external inductance (L/R).

A 27-MHz radio frequency 1-kW oscillator is used to pre-excite the discharge. There is no perceptible difference in discharge characteristics whether the rf is coupled inductively or capacitively. Without pre-excitation, gas breakdown is delayed one half-cycle.

2.2. Coil geometries

A schematic of the coil geometry and associated diagnostics is shown in Fig. 3. Axial magnetic fields in the range of 17 kG to 220 kG rising in 2.8—4.5 μs are produced by variations in the physical dimensions of the single-turn coil for a fixed aspect ratio, diameter/length = 0.44. Table I lists the discharge period (τ) and the maximum second half-cycle magnetic fields (B_z), rate of field rise ($\dot{B}_z$) and azimuthal electric field

* Crowbarring is synonymous with short-circuiting.

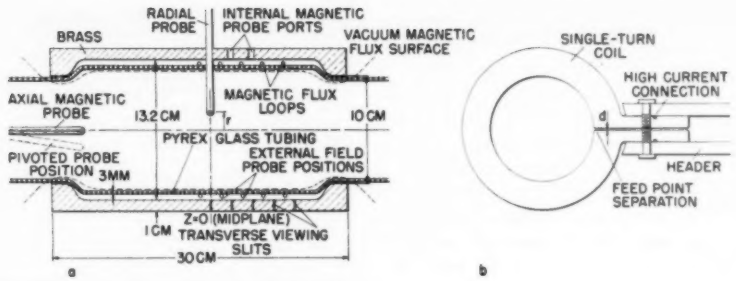


Fig. 3 General geometrical arrangement of coil assembly.

TABLE I Compilation of the orthogonal pinch geometries, mirror ratios (R_m), discharge parameters and neutron yields. The latter two items are quoted for 20 kV operation and refer to the second half compression cycle of the discharge.

R_m	5.0:1		1.4:1	1.3:1	1.18:1			1.1:1	1.09:1	1.02:1		0.77:1	0.7:1
Case	I	II	I	I	I	I[a]	II	II	IV	II	III[b]	II[a]	I
τ μs (Period)	13.6	11.6	17.3	17.1	17.5	17.5	13.1	14.1	15.8	13.8	11.9	13.85	19
B_{max} (kG)	17.4	39.4	24.8	27.5	28.4	28.4	64.0	69.8	70.0	77.1	222.0	97.0	44.2
$\dot{B} \times 10^{-10}$ (G/s)	0.803	2.13	0.9	1.01	1.02	1.02	3.07	3.1	2.78	3.51	11.65	4.4	1.46
E_θ (wall) (V/cm)	265	352	298	333	336	300	506	513	528	580	960	726	480
Y (neut/burst)	none	none	2×10^5	3.5×10^5	7×10^5	2.8×10^5	1.5×10^6	2×10^6	8.7×10^5	5.3×10^6	small	7.5×10^5	not measured

Case I 30 cm long, 13.2 cm diameter Contoured Pyrex Tube
Case II 15 cm long, 6.6 cm diameter Contoured Pyrex Tube
Case III 7.5 cm long, 3.3 cm diameter Contoured Pyrex Tube
Case IV 10.0 cm long, 7.6 cm diameter Straight Al_2O_3 Ceramic Tube

[a] Refers to an uncontoured Pyrex tube.
[b] Designed for $R_m = 1.02$ but metal was damaged at high magnetic fields.

(E_θ) for all cases studied at an applied condenser voltage of 20 kV.

Because of the small electrical skin depth at high frequency, the magnetic field can be made larger at the ends of a single-turn coil by reducing the diameter of the coil open ends (see Fig. 3). In this manner, magnetic mirror ratios* of 5.0:1, 1.4:1, 1.3:1, 1.18:1, and 0.7:1 (straight tube) were studied for Case I, the latter ratio indicating a monotonic decrease of the magnetic field as a function of axial distance from the midplane. By reducing the overall coil dimensions by a factor of 2, Case II, higher central magnetic fields were obtained for a maximum condenser energy of 30 kJ at 20 kV with mirror ratios of 5.0:1, 1.18:1, 1.1:1, 1.02:1, and 0.77:1. Further reduction in coil dimension by another factor of 2, Case III was made for mirror ratio 1.02:1. Cases I, II and III employed a Pyrex glass vacuum vessel (2 to 2.5 mm wall thickness) shaped approximately to the contour of the driving coil with particular attention to a close fit in the mirror region. In most cases, an attempt was made to make the inner glass surface a magnetic field surface* and to avoid a flux line which originated at the inner glass surface in the mirror from passing through the glass wall at other axial z positions. Two cases of an uncontoured Pyrex vessel, see footnote in Table I, will be compared.

Case IV refers to a high alumina Al_2O_3 (96% purity) discharge tube [2] 10 cm long and 7.6 cm diameter. The ceramic tube did not fit the contour of the driving coil as in the Pyrex cases and as such can be considered a straight tube.

2.3. Magnetic probes

The magnetic probe consists of 6 – 8 turns of wire on a 2 mm diameter nylon bobbin inserted within a thin wall ceramic jacket ~4.5 mm outer diameter. When the probe jacket is inserted into the plasma, a few discharges usually burst the ceramic jacket. This

* The on-axis ratio of magnetic field B_m in the mirror region to B_0 at the midplane of the coil defines the mirror ratio $R_m = B_m/B_0$ for $B_m > B_0$. When $B_m < B_0$ for all z, R_m is < 1 and B_m is arbitrarily assigned the field value at the entrance face of the coil.

* In reality, the presence of a plasma modifies or destroys any attempt to make the inner glass surface a magnetic surface.

breakage has been overcome by evacuating the ceramic jacket to a few microns pressure. This breakage is attributed simply to the fact that the thin ceramic wall, prestressed to ~160 pounds per square inch, due to atmospheric pressure on the inner side becomes weakened by the plasma striking its surface. Thin metal jackets have been used but the effects of electrical skin effect and insulation pose other problems.

Measurements of the B_z component of the magnetic field are obtained either with a probe inserted radially into the discharge at several z positions or with an axial directed probe which can be pivoted to obtain the radial distribution of the B_z field (see Fig. 3).

It is found that many discharges are required to "condition" the probe jacket prior to achieving reproducible magnetic field signals. It is believed that this "conditioning" removes surface impurities since the amount of visible light emitted from the probe surface decreases considerably for successive discharges, although it never vanishes.

The perturbations of the probe jacket on plasma temperature and conductivity are still unknown except to note that the probe adversely affects those processes that are responsible for neutron production. The detailed manner in which the magnetic field varies during successive discharges within and external to the plasma volume suggests, however. that the plasma conductivity is not greatly impaired by the probe.

3. Results

3.1. Magnetic phenomena

The magnetic phenomena [14] characterizing plasma compression in the orthogonal geometry can be listed as 1) hydromagnetic radial oscillations [15, 16] of the plasma-field interface during the first compression cycle, 2) the trapping of residual magnetic field from the first half discharge cycle at the beginning of the second compression cycle by a second current sheath at a time prior to the end of the first half-cycle, 3) the compression of the trapped field reversed in direction to the second half-cycle driving field, and 4) the transition of the trapped reversed field to the vacuum field direction during the later stages of the second half-cycle compression.

3.1.1. *Hydromagnetic radial oscillations*

During the first half-cycle compression, high frequency oscillations of the central magnetic field near the midplane of the coil were detected, first by small magnetic probes and later recorded by fast streak photography similar to other investigators [4, 17]. In deuterium, these oscillations (Fig. 4b) were in the megahertz range and observed at pressures ~200 microns Hg*. In argon, the frequency of similar oscillations was lower and a study of these oscillations was made over the pressure range 10—1000 microns at several applied voltages. A typical B_z versus time record is shown in Fig. 5a at an argon pressure of 100 microns for the Case I coil geometry, $R_m = 0.7:1$

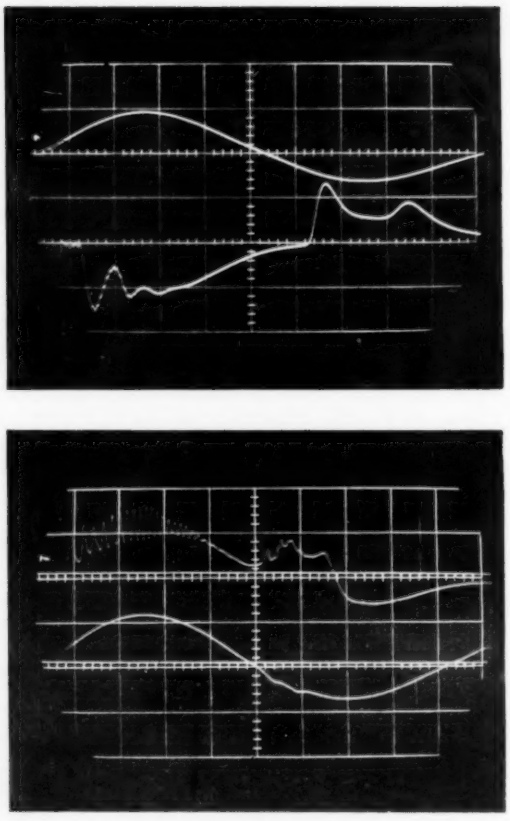


Fig. 4 Hydromagnetic radial oscillations in the central magnetic field for discharges in a) argon and b) deuterium. Upper trace in a) and lower in b) is the internal B_z-field.

(straight coil). Later investigation showed that mirror field geometries $R_m > 1$ exhibited the same phenomenon. The following explanation describes satisfactorily the experimental results for argon.

During the ionization stage leading to sheath formation at the inner surface of the Pyrex tube, a small fraction of the external B_z field leaks or diffuses through the partially ionized layer into the body of gas. After a time (t_0), a highly conducting current layer is formed near the glass wall which prevents further diffusion. As the current in this layer rises, it detaches from the wall compressing the leaked-in-field. As a result, the current layer forms a boundary layer between regions of magnetic field of the same sign which supports two separate azimuthal currents (j_θ). The outer surface current is produced in an opposite sense to that in the driving coil while the direction of the inner surface current is of the same sign as the external driving current. As the boundary moves radially inward, it sweeps up the gas ahead and compresses the trapped field. Due to the inertia of the layer, the trapped field is overcompressed causing the layer to oscillate about a characteristic radius at which the external and trapped magnetic fields are equal.

* For $p < 200\mu$ no gas currens is evident during first half-cycle.

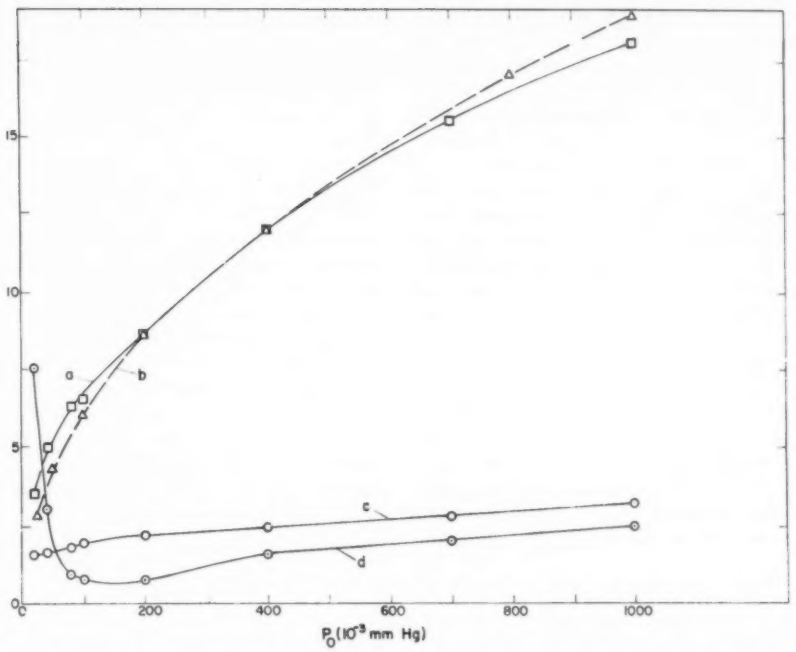


Fig. 5 Experimental results for argon at 15 kV Case I geometry showing a) period of radial oscillation, b) calculated period, normalized to $p = 200$ microns, based on B_c = constant, c) the time to the peak of the first hydromagnetic compression, and d) the amount of field leaking in during the initial stages of ionization and sheath formation as a function of pressure. The mirror ratio is 1.4:1.

This model has been analyzed by assuming that 1) the current sheath at time t_0 has infinite conductivity (no diffusion of magnetic fields in or out of the layer), 2) the collapsing current layer sweeps up (snow plow model [10]) all the gas into a thin cyclindrical annulus (the time of collapse is less than sound speed across the diameter), and 3) the nkT gas pressure in argon is small, i.e., the ∇p term in the equation of motion is negligible.

The equation of motion under these assumptions can be written in dimensionless form as

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = -k^2\eta(1-\eta^{-4}), \tag{1}$$

where $\eta = r/r_c$ and $k^2 = B_c^2/(4\varrho_0\pi r_0^2)$. The quantities r_c and B_c are defined* as the equilibrium values of radius and magnetic field, respectively, about which the oscillations take place. Eq. (1) has the solution

$$\eta^2 = S^2 + (S^4-1)^{1/4}\sin 2kt,$$

$$S^2 = \frac{1}{2}(\eta_{max}^2 + \eta_{min}^2). \tag{2}$$

S^2 is a constant defined in terms of the maximum and minimum amplitude of oscillation of the layer.

The solution to the nonlinear equation of motion shows two important results, 1) the radial motion of the plasma layer about the equilibrium value is always nonsinusoidal except in the limit of no compression and 2) the frequency of oscillation given as $\omega = (B^2/\varrho_l)^{1/2}$ (where ϱ_l is the mass line-density) is independent of the amplitude of oscillation. Solving for t in Eq. (2), it can be shown that for large amplitudes of oscillations (S large), the plasma layer spends an increasing proportion of its time at larger radii, whereas for small amplitudes ($S \to 1$), the radial motion approaches more closely to a true sinusoid about the equilibrium radius r_c.

Verification of these predictions for A was obtained primarily by varying the initial gas pressure. As the pressure is reduced, the oscillations of the internal magnetic field (B_z vs t) become nonlinear. Curve a, Fig. 6, shows the period of the first radial oscillation as a function of argon pressure while curve b shows the calculated period, normalized to $p = 200$ microns taking B_c and the final compression to be constant. The deviation between curves a and b at the high and low pressure ends can be accounted for on the basis of the varying compression as a function of initial pressure. A change in the initial gas density results not only in a change of the total mass which affects the collapse time (i.e., time to the first compression) curve c, but may also influence the initial ionization rate leading to sheath formation at time t_0. Since time t_0 is defined as the time when a conducting sheath is formed at the walls, it is clear that time t_0 determines the amount of initial flux to be trapped and compressed. Curve d shows that the fraction of field leaking in during sheath formation is a function of gas pressure.

* B_c is actually time varying; however, it is assumed constant during one oscillation.

From the measurements of the equilibrium magnetic field and frequency of oscillations, the mass line density (ϱ_l) in the sheath corresponds approximately to the sweeping inward (snowplow) of all the gas initially in the tube within experimental accuracy $\sim$10 %. This result is also in good agreement with the final density (ϱ_l) calculated from $\varrho_0 \pi(r_0^2 - r_c^2)$ assuming a completely ionized gas. The value of the equilibrium radius (r_c) is obtained from the magnetic field distribution and for a particular set of initial parameters, r_c is $\sim$1.5 cm. Using this radius, it is found that the magnitude of the trapped magnetic field at $t=t_0$ is $\sim$800 gauss which yields a sheath formation time of 0.08 μs.

A detailed theoretical analysis of these oscillations has been made by J. TAYLOR [18] taking into account the effects of finite conductivity and sheath thickness. The result for the frequency given above is modified only slightly by small correction factors near one. NIBLETT and GREEN [17] have shown experimentally similar oscillations existing in their apparatus using magnetic probes and streak photography.

3.1.2. *Trapped reversed magnetic field during the second half-cycle*

The previous section was concerned specifically with the hydromagnetic effects in argon during the first half-cycle. Similar effects were observed in deuterium for $p>200$ microns (see Fig. 4b). However, for deuterium pressures <200 microns, there is generally no first half-cycle gas breakdown; gas breakdown is evident near the end of the first half-cycle.

During the second half discharge cycle, a trapped reversed magnetic field and the transition from a reverse to the vacuum field direction has been observed by magnetic probes in all of the geometries examined. The strength of the trapped reverse field at the beginning of the second half-cycle depends at what time during the second quarter-cycle a second current layer forms at the wall. For instance, one of the early straight coil geometries [12], aspect ratio of 0.8, initiated a current layer during the early portion of the second quarter-cycle $\sim$3—3.5 μs before $B_z=0$ which resulted in a recompression of the trapped magnetic field during this period. The trapped field in this case was held for $\sim$6—7 μs but eventually the transition to the vacuum field direction was made late in the second half-cycle.

In contrast, the present experiments show trapping of the magnetic field generally near the end of the second quarter-cycle $\sim$0.1—0.3 μs before the external magnetic field passes through zero. At very low bank voltages (2—3 kV), trapping of the magnetic field was observed $\sim$1 μs before $B_z=0$ (end of second quarter-cycle). From these observations it appears that gas breakdown leading to sheath formation and field trapping is a function of applied voltage, pressure, geometry and the surface condition of the glass wall.

Once the current sheath begins to compress (start of second half-cycle), inertial effects become important. At the first bounce, which occurs $\sim$0.3—0.6 μs depending on conditions, the trapped reverse field is compressed to 2—3 times the driven B_z value. From a knowledge of B_z internal and external to the layer and the time to the first compression, the computed layer mass density corresponds to sweeping up approximately all the gas. During the reversed trapped field, hydromagnetic oscillations of the current boundary layer are frequently observed. This situation, in contrast to those oscillations observed in the first half-cycle, is characterized by a current layer separating two field regions of opposite sign. The plasma layer supports two azimuthal currents of the same sign, 1) that induced by the changing external magnetic field which resides in the outer portion of the conducting plasma layer and 2) that required to support the trapped reverse field, i.e., $B_{\text{reverse}} \sim I$, which resides on the inner surface of the plasma layer. The value of the total current varies due to the expansions and contractions of the plasma column but always remains unidirectional while the sum exceeds the current in the driving coil. As the mirror ratio is reduced it is found that the frequency and amplitude of these oscillations increase (at $R_m=1.18:1$, Case I, $f\approx 1$ MHz, and at $R_m=1.02$, Case II, $f\approx 3.0$ MHz). These oscillations are observed generally in the midplane region of the coil and are analyzed similarly to that in the last section. The calculation of the mass density ϱ_l from a knowledge of B_c and frequency is consistent with most of the gas swept inward by the current layer.

The amplitudes of the oscillations damp appreciably, showing that oscillatory energy is lost in the plasma. In some cases, 2—3 oscillations in the trapped field can be observed as shown in Fig. 6(a). These oscillations are not typical of the entire length of the plasma column but are restricted generally to the midplane region of the coil. Compare oscillograms in column a and b of Fig. 6 for Case I geometry $R_m=1.3:1$. Column c (upper two traces) also shows that these oscillations occur over a small axial region near the midplane for $R_m=1.18:1$, Case I geometry. This oscillatory phenomenon leads smoothly to a decrease of the trapped field to zero with subsequent penetration of the external driving magnetic field to the axis. In fact, after the first compression of the trapped field which occurs for all z, a gradual decrease of the trapped field can be discerned leading, within 1.5—3.0 μs, to a more rapid decrease of trapped field to zero. The intermixing of magnetic fields has been observed in all orthogonal pinch geometries with and without magnetic mirrors over a wide range of applied voltage and magnetic fields.

This experimental evidence suggests that the current layer separating these fields is caused to deteriorate either as a result of failure of the plasma layer to support the large current densities that are required for field separation or that the azimuthal sheet currents coalesce in z producing an unstable configuration much like the $m=0$ (sausage) instability observed in the normal dynamic pinch.

At early times in the compression cycle, trapped reverse magnetic fields are measured for all values

of z even extending out the ends of the driving coil for several centimeters ($\sim$10 cm). When the total magnetic flux through the driving coil goes through zero as measured by an external loop (see Fig. 3), a trapped reverse magnetic field is measured in the gas. At early times in the cycle the magnitude of the trapped field associated with the return trapped flux would be largest near the end of the coil (mirror region), which could enhance the magnetic field external to the plasma causing a transient mirror effect. In

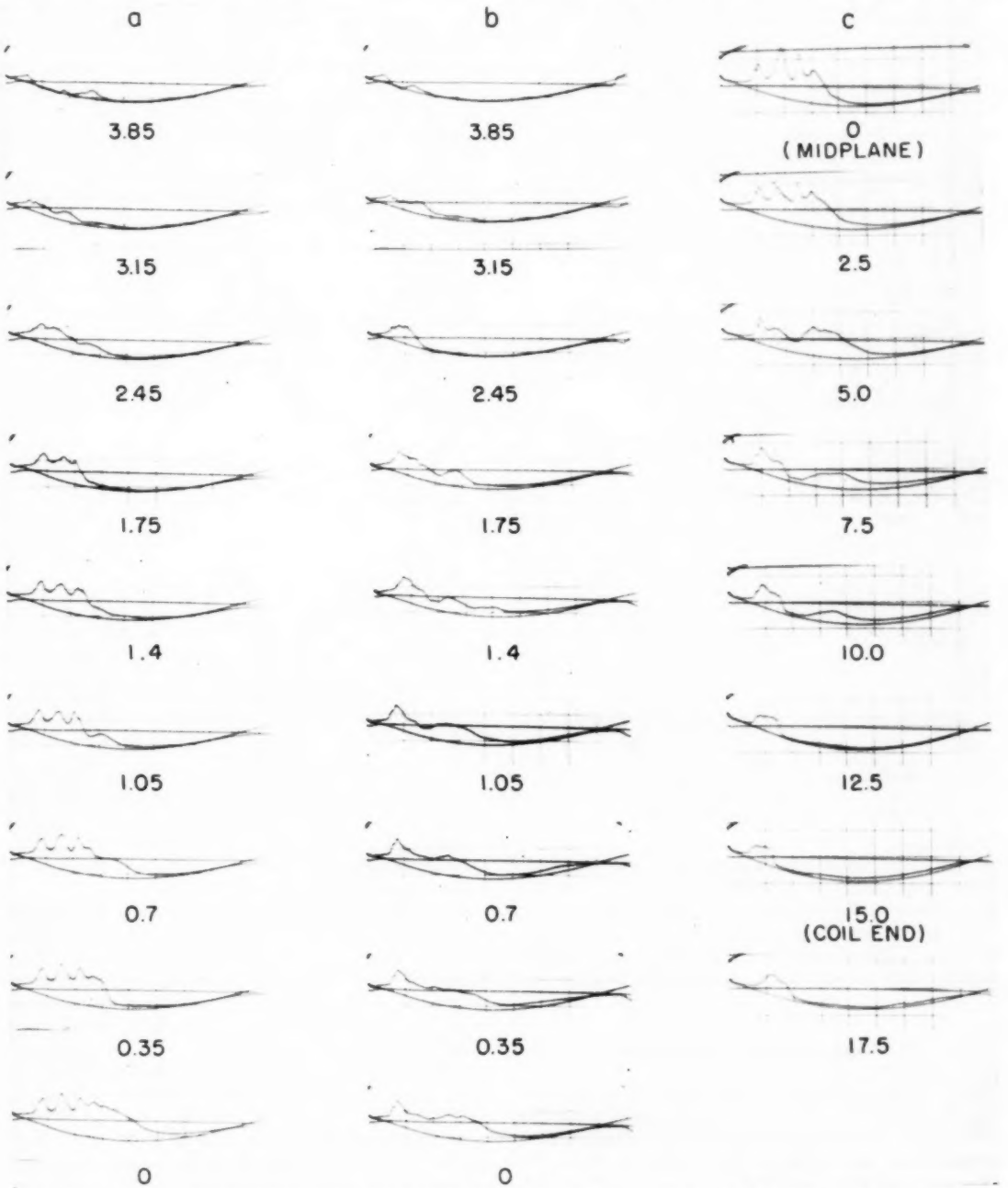


Fig. 6 An example of the time variation of the axial component of the magnetic field as a function of r and z for Case I geometry. Columns "a" and "b" refer to the radial variation of B_z vs t for $R_m = 1.3:1$ in the planes $z = 1$ and 5 cm respectively. Column "c" is the axial variation of B_z vs t for $R_m = 1.18:1$ at $r = 0$. These data are for an applied voltage 16 kV, p (D_2) = 80×10^{-3} mm Hg. Sweep speed 1 μs/cm. Number below each trace refers to position of probe in centimeters.

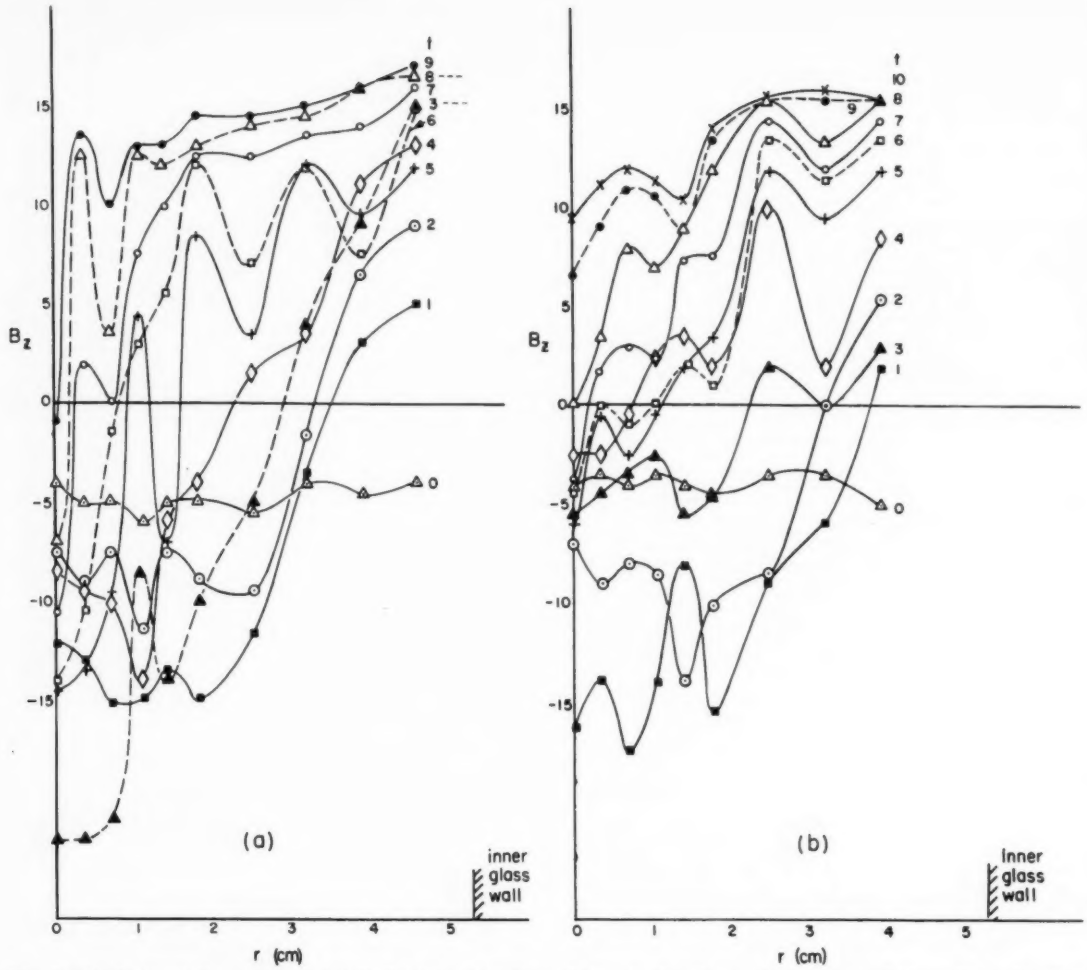


Fig. 8 Radial variation of the axial B_z field as a function of time in the plane, a) $z = 1$ cm and b) $z = 5$ cm, for Case I, $R_m = 1.3:1$ at $V = 16$ kV and p (D_2) = 80 μ. Curve "O" corresponds to beginning of second compression half-cycle; each additional curve is 0.4 μs later.

this way the curvature of the plasma-field boundary at the ends would be increased by the field of the return trapped flux, leading to the rapid growth of the plasma-field interchange instability. These data are taken to imply that the return flux of the trapped magnetic ffeld threads back through the coil.

3.1.3 *Magnetic field distribution*

The plasma during the second half-cycle in all cases studied exhibits magnetic field trapping and compression with the eventual intermixing of the trapped and external fields during the second half-cycle. From B_z probe traces as shown in Fig. 6, taken as a function of radius (columns a and b) and axial position (column c), the radial and axial distributions of the B_z field are obtained as a function of time. For all cases except Case I, $R_m = 5:1$ the operating D_2 pressure and applied voltage were adjusted to give a neutron yield* before magnetic data were recorded.

The magnetic data at the start of the second half-cycle will be discussed for a particular case followed by a comparison of other cases. The B_z radial distribution for Case I, $R_m = 1.3:1$ is shown in Fig. 7 for an applied voltage of 16 kV at a D_2 pressure of 80 microns. Figures 7 (a) and (b) refer to data obtained by radial probes at axial positions $z = 1$ cm (midplane) and $z = 5$ cm respectively. As the radial component of the magnetic field (B_r) is small in the vicinity of the midplane, the position of the current layer is given by the radial gradient of the B_z field. Zero time in these figures refers to that time when the external magnetic field passes through zero (beginning of second half-cycle), and each subsequent curve in the field configu-

* The yield of neutrons in most cases was insignificant; nevertheless, the magnetic behavior under these conditions during the second half-cycle is of interest.

ration at time intervals of 0.4 μs during the second half compression cycle.

At $z=1$ cm, field distribution at $t=0$ shows that a fraction of the first half-cycle field is trapped within the gas throughout the tube diameter. With time, the external field increases in the opposite direction (shown positive in Fig. 7a) and compresses the trapped field (reversed) toward the center of the tube. During the early compression phase, the current layer is singular and occupies a radial interval of 1—2 cm. Later in the cycle, but before peak field, several current layers appear. Near peak field, this multiple current structure reduces approximately to a single broad current layer which extends over most of the tube diameter.

The complex field distribution was observed in an earlier experiment (see 3-dimensional field plot of Fig. 2) and it is now believed to correspond to the break-up of the main current sheath during implosion (see streak photograph Fig. 1). The data of Fig. 7 are interpreted as a single current layer originating near the tube walls from which several subsidiary current sheaths are formed during the intermediate compression phase, each carrying current in opposite directions akin to the layers of an "onion".

Beyond peak field time, the external field penetrates almost completely to the axis. This description of the radial distribution of the B_z field at the midplane is characteristic of all cases except those for mirror ratio 5:1 (this will be treated separately at the end of this section).

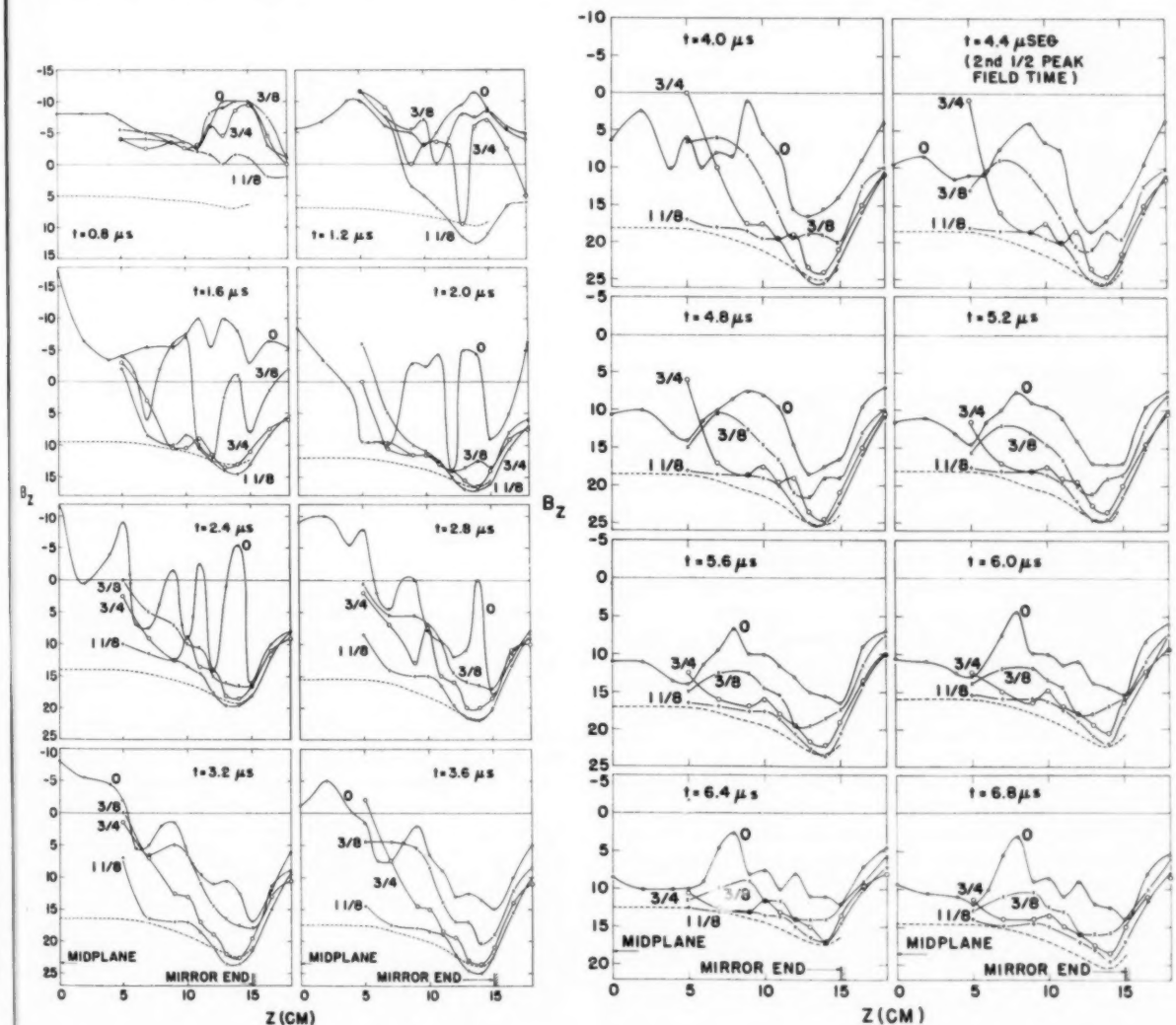


Fig. 9 Variation of the B_z field as a function of z, r, and time for Case I $R_m = 1.4:1$, $V = 15$ kV and p (D_2) = 75 μ Hg. The upper left graph starts at $t = 0.8$ μs in the second half-cycle and each succeeding graph shows the same phenomenon in time intervals of 0.4 μs. The numbered curves refer to radial probe positions of $r = 0$, 3/8, 3/4 and 1 1/8 inch at a given time. The dotted curve represents the vacuum (no gas) magnetic field at $r = 0$. Notation ($-B_z$) refers to a trapped reverse B_z field.

At $z=5$ cm, Fig. 7b, similar data were obtained during the second half compression cycle. The important difference is that the current layer or layers are thinner and the average central field, in contrast to that at $z=1$ cm, reaches ~ 0.75 of the external field at peak field time. The field distribution at later times beyond peak field continues to show a depression in the central field as the external field decreases (note Fig. 6c for $z>0$). This field configuration is one in which a plasma may be confined from the walls of the vessel at peak field and during the sinusoidal falloff of the external field. These data are typical of all cases, with the exception of the largest mirror ratio, showing that the plasma prefers to reside in those regions between the midplane and the end mirror and not in the midplane region as one would have first guessed. For Case I geometry, this behavior is found in a z region $5<z<12$ cm.

The field distribution at $z=1$ cm and $z=5$ cm (Fig. 7) shows that the trapped reverse magnetic flux is not constant with time but begins to decrease slowly during the early compression phase and later more rapidly until it is annihilated. The flux cancellation or leakage rate is greater at $z=5$ cm than at $z=1$ cm. It is believed that the apparent increase of flux cancellation at $z=5$ cm reflects plasma motion along the z axis toward the midplane $z=0$ (high velocity plasma motion has been recorded by magnetic probes and ballistic pendulum).

With an axial probe inserted parallel to the axis (Fig. 3) through the mirror end, the B_z field distributions are obtained as a function of z, r and time for most of the cases studied. These data show clearly that a trapped magnetic field exists along the axis at early times in the second half-cycle and that the B_z field near the axis between the midplane and the mirror end remains generally smaller at peak field time than it does in the midplane region. Figure 8 shows the field distribution B_z vs z for various times (0.8 to 6.8 μs), time notation being the same as before, at radii $r=0$, 3/8, 3/4 and 1-1/8 inches for Case I, $R_m=1.4:1$ at 15 kV applied voltage and $p=75$ μHg. Other cases show the same general complex field behavior which leads to the interpretation that the plasma undergoes changes in the radial and axial directions as a function of time.

By superimposing the vacuum magnetic field on the probe signal (the magnetic field outside the plasma volume measured in vacuum or with a plasma present is the same within a reading accuracy of 1—2%) a comparison of the gas and no-gas magnetic fields can be made. This result is shown as the difference of the squares of the magnetic field B_z without and with gas present as Δ ($B_{vac}^2 - B_{gas}^2$). This quantity Δ represents the net magnetic pressure and is shown in Fig. 9 as a function of z and time evaluated at $r\sim 0$ for most of the cases studied. If the Δ can be interpreted as representing plasma pressure nkT, then it shows that the plasma pressure distribution along the axis is double-humped at peak field time, i.e., Δ is smaller in the midplane, and that the majority of the plasma resides away from the midplane. Also note

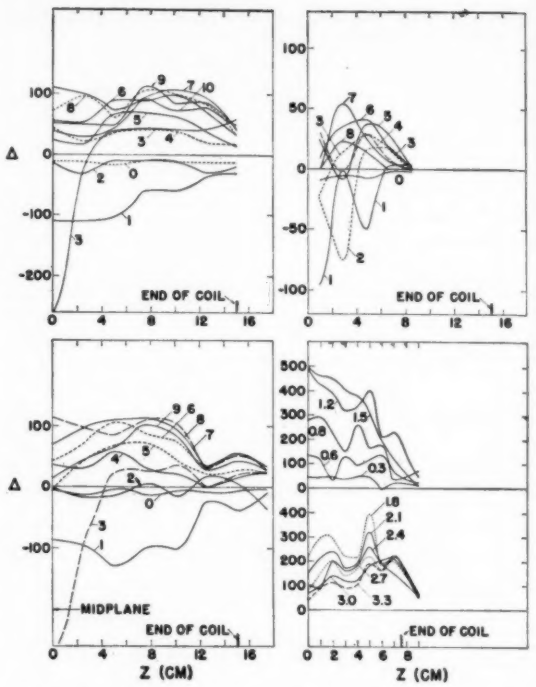


Fig. 9 Net magnetic pressure distribution in z for several geometries. Numbers attached to each curve represent successive time intervals of 0.44 μs starting at $t=0$ ($B_{vac}=0$), except for lower right-hand set of curves where the numbers represent time in microseconds. Note difference in ordinate. Negative Δ's at early times correspond to inertial effects of the plasma.

Upper left: $R_m=1.3:1$, Case I, $V_0=16$ kv, $p=60\mu$, $\tau/4=4.3\mu$s.
Upper right: $R_m=5:1$, Case I, $V_0=17.5$ kv, $p=57\mu$, $\tau/4=3.4\mu$s.
Lower left: $R_m=1.18:1$, Case I, $V_0=16$ kv, $p=60\mu$, $\tau/4=4.4\mu$s.
Lower right: $R_m=1.1:1$, Case II, $V_0=18$ kv, $p=135\mu$, $\tau/4=3.4\mu$s

the substantial Δ in the mirror region suggesting plasma end-streaming at peak field. The negative Δ during the early phases of compression indicate a substantial plasma inertial effect.

For the case of mirror ratio 5:1, the field configuration is different subsequent to the production of a reversed field. The duration of the reversed field during the second half-cycle is a few tenths of microseconds. After the transition, the external B_z field penetrates to the axis to almost full vacuum value and remains throughout the second half-cycle. Penetration or diffusion of fields is extremely rapid (0.05—0.1 μs) at the midplane. Two cases of 5:1 mirror ratio were tried (Case I and II) each producing central magnetic fields shown in Table I. No neutrons were observed in either case. Δ, in contrast to the lower mirror ratio cases, is appreciably less for all times. Except for the short-lived reverse field, the magnetic field signal resembles the vacuum field signal at all points along the axis. It is inferred from these results that the plasma becomes hydrodynamically unstable shortly after detachment from the walls allowing rapid penetration of the magnetic field. Although some intermixing

heating of the plasma is inferred, the plasma volume position cannot be identified after the intermixing process. By definition, large axial field gradients exist for $R_m = 5:1$ which can lead to violent axial plasma motion as well as large field curvatures, the latter causing, perhaps, the rapid growth of the plasma-field interchange instability (flute instability) [5, 9, 17]. Further evidence for complete plasma breakup is obtained with streak photographs (discussed later).

The B_z vs t oscillograms shown in Fig. 6c for $R_m = 1.18:1$ as a function of z for radial positions near the axis show, in particular, that the duration of the reversed B_z field is a minimum in the region of peak mirror field and becomes progressively longer as the midplane is approached. In addition, probe measurements show that a conducting medium is removed from this region at a velocity of $\sim 10^7$ cm/s toward the midplane which allows the vacuum magnetic field to penetrate rapidly to the axis. However, the appearance of the vacuum field is short-lived in the near mirror region. Within 0.2—0.6 μs after the plasma is removed (the spread in time depending on the probe position) a conducting plasma once again enters this region from the midplane region pushing aside the vacuum magnetic field.

Some portion of the moving plasma is lost through the mirror end as shown by probe measurements made in the mirror region (Fig. 9) and also by streak photographs (to be discussed). The remaining portion would appear to be reflected again from the mirror producing some fine structure in the magnetic field signal in the near mirror region; however, no direct correlation has been made.

Ballistic pendulum measurements* made just outside the mirror coil record a momentum change of ~480 dyne-sec which, on the basis of half the total enclosed mass being expelled, would yield an average expulsion velocity of $\sim 2 \times 10^7$ cm/s. These velocity measurements agree quantitatively with those measured by magnetic probes within the mirror system and by streak photographs taken outside the mirror.

3.2 Streak photographs

Under conditions of contamination, streak photographs clearly outline the luminous portion of the plasma. Fully ionized plasmas, on the other hand, also emit radiation energy in the visible wavelength region of the spectrum (~3,500 Å—8,000 Å). It has been shown [19] that the spectral emittance E_λ in the visible continuum from a high temperature plasma is dominated by $(T_e)^{-1/2}$ where T_e is the electron temperature. During the early stages of sheath formation and detachment when the electron temperature is relatively low, a larger proportion of the radiated energy falls in the visible. As the plasma becomes heated, T_e increases and E_λ decreases in the visible. When the optical system has a field of depth small compared to the diameter of the discharge vessel, streak photographs take on a specific meaning. For example, regions of no visible light do not lead necessarily to the assumption of a fully ionized gas, however, regions of no light at the walls of the discharge tube after the first plasma compression lead unambiguously to the conclusion that no high temperature plasma is interacting with the wall during decompression, i.e., the plasma is confined away from the walls.

Streak photographs of a deuterium (D_2) discharge were taken through a 0.1 mm slit (see Fig. 3 (a) for slit positions) with a rotating mirror camera at a writing speed of 1.4 mm/μs. The effective aperture of the streak camera is f/2.8 and all photographic film was developed to ~3,000 ASA rating. Observations were made 1) with the slit perpendicular to the z axis at several axial viewing ports spaced 2 cm apart (transverse) and 2) just outside the confining region with the slit aligned along the axis for several radial positions (horizontal). Figure 10 (a) shows typical transverse streak photographs taken at the midplane $z = 0$ (upper) and $z = 5.0$ cm (lower) of the coil for a D_2 discharge of 60 microns, Case I geometry, $V_0 = 17.5$ kV and $R_m = 1.4:1$ (time proceeds from left to right). During the first half-cycle, the intensity of light from the gas is usually below film sensitivity except at very high D_2 pressures or when argon replaces D_2 (in Fig. 10 (a) the start of the first half-cycle can just be discerned). These streak photographs and those that follow are characterized by a fast luminous inward moving front that originates at the inside surface of the Pyrex discharge tube near the peak of the driving electric field E_θ (near the end of the first half-cycle). At each subsequent field reversal in the discharge cycle, occurring at 8.65 μs for the case of Fig. 10 (a), a new luminous front is initiated at the wall. This is evidence for some gas remaining near the wall as a result of an inefficient sweeping up by the collapse of the current sheath or evidence that some fraction of working gas, attached as a monomolecular layer to the wall, is released and ionized subsequent to implosion by strong radiation processes. In any event, a low-density highly conducting gas may exist near the wall allowing subsequent breakdown.

The fine structure in the light intensity can be subdivided generally into 1) a fast luminous wave which appears almost instantaneously at the center of the discharge tube and 2) a slower component which reflects at ~1/3 the tube radius in 0.4 μs. The luminous front, from which both appear to originate, remains in contact with the wall for ~0.1 μs before detaching. The slower component is sharply defined and appears to outline a hollow [17, 20] oscillating (radial) discharge. At 1.5 μs, the slow-component wave blends into a more complex oscillatory structure which finally disappears. The light intensity decreases eventually into a blurred and diffuse background of light near the center of the tube. This background of light is not devoid of structure and shows that the plasma is not in a quiescent state but exhibits asymmetrical motion. As the mirror ratio is decreased toward 1, this faint background of light is diminished.

* This measurement is, at best, qualitative because of the uncertainty in the conductivity of the glass surface in the presence of the plasma.

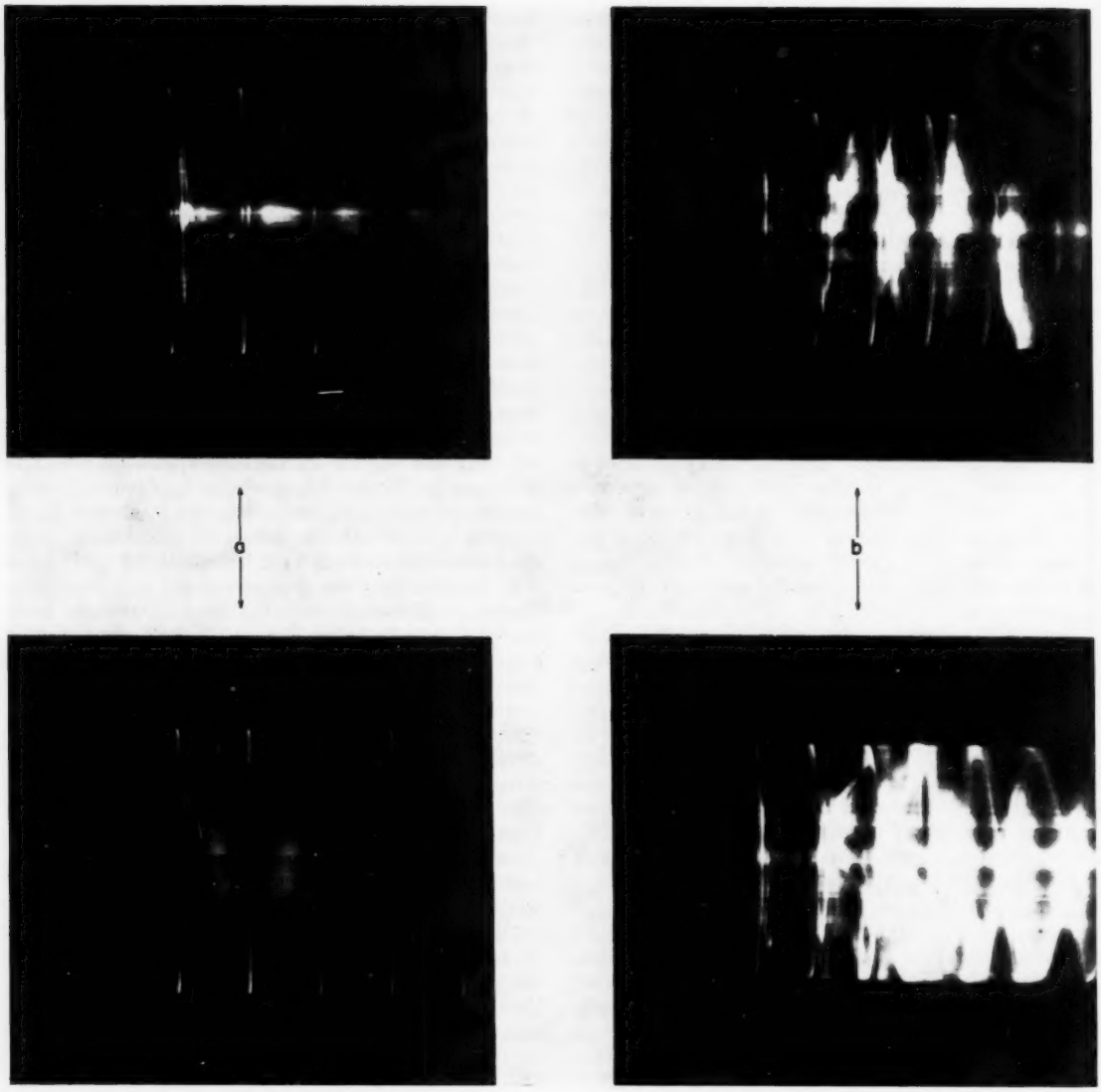


Fig. 10 Transverse streak photographs taken at the planes $z=0$ and 5 cm for mirror ratios 1.4:1 and 5:1 at $V_0=$ $=17.5$ kV and p (D_2) $=60\times10^{-3}$ mm Hg. "a" refers to $R_m=1.4:1$ and "b" to $R_m=5:1$. (Writing speed 1.4 mm/μs.)

In most of the cases studied, streak photographs show that the luminous portion of the plasma behaves differently as a function of z. For instance, for R_m $=1.4:1$, Case I geometry, transverse streak photographs a $z>5$ cm show less oscillating light structure and an overall decrease of light intensity than at $z=0$ (magnetic probes, previously discussed also show a diminution in the oscillatory structure of the plasma column for $z>0$). For Case II geometry ($l=15$ cm) and $R_m=1.18:1$ photographs at $z\geq1$ cm show that the luminous portion of the plasma is more quiescent and of weaker intensity than at $z=0$.

Figure 10 (b) shows streak photographs for Case I, $R_m=5:1$ under approximately the same pressure and magnetic field conditions as for Fig. 10 (a). These photographs show a trend toward a chaotic light structure more pronounced than that indicated for R_m $=1.4:1$. Asymmetrical light regions throughout the cross section of the discharge suggest that the plasma may be broken into small filamentary streamers early in the compression cycle which undergo chaotic radial motion as the external field rises.

The difference in the basic behavior of the discharge for mirror ratio 1.4:1 and 5:1 is evidenced further by the absence of any neutron yield. The maximum central magnetic field for $R_m=5:1$ is lower by $\sim36\%$ than for $R_m=1.4:1$. If it is assumed that neutron production in the $R_m=1.4:1$ case results from a

thermal plasma, then one may account for the absence of neutrons in the $R_m = 5:1$ case by the reduction in the final ion temperature due to a smaller magnetic pressure.

Because of this uncertainty, Case I $R_m = 5:1$ was scaled down in size by a factor of 2 maintaining the 5:1 mirror ratio. This system (Case II) was capable of producing a central magnetic field of 39 kG (an increase of ~ 2.2) rising in 2.9 μs with a maximum electric field (E_θ) of ~ 350 V/cm at the midplane and 1.75 kV/cm at the mirror. Streak photographs show that the plasma undergoes similar chaotic motions as shown in Fig. 10 (b) for Case I. No neutrons are observed. It appears that the plasma is unstable in both Case I and II geometries for $R_m = 5:1$.

Nevertheless, it is found that plasma containment by a mirror orthogonal pinch geometry is enhanced by an increasing mirror ratio. Smear photographs taken parallel to the axis just outside the mirror

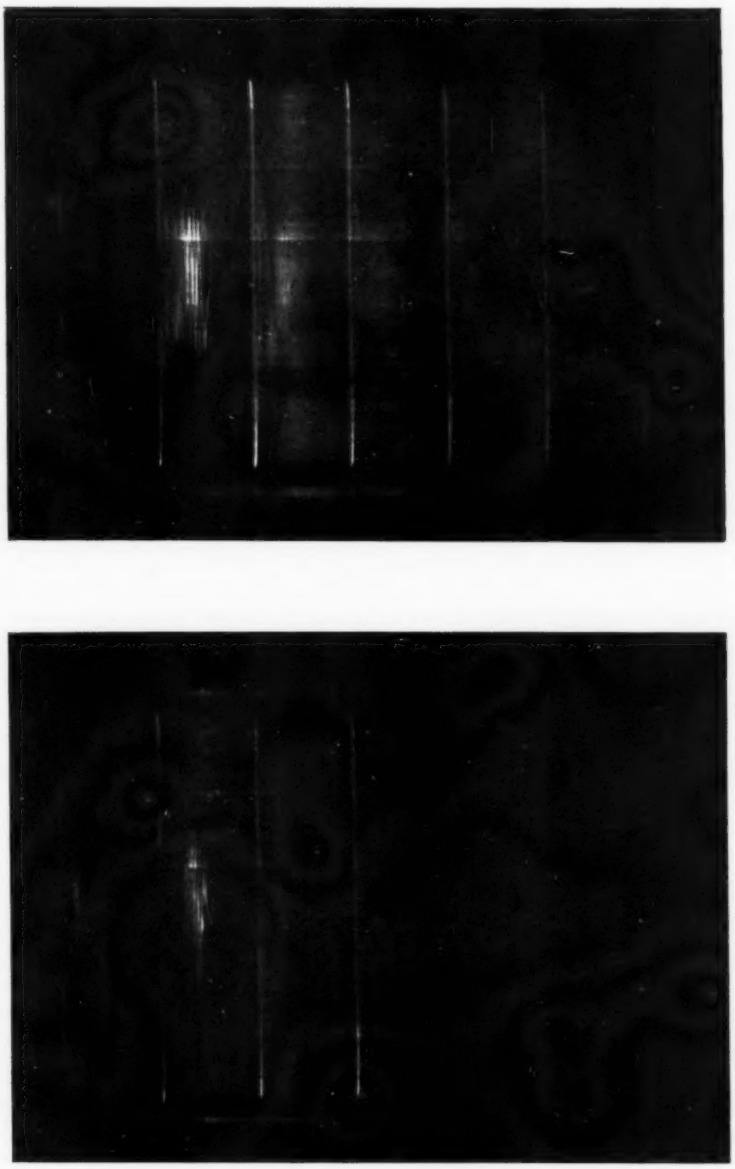


Fig. 11 Transverse streak photograph taken at $z = 0$ shows high frequency radial oscillations of the plasma boundary. The oscillations in "b" are restricted to the second half-cycle while "a" shows, in addition, oscillations during the third half-cycle. Neutron pulses for discharges "a" and "b" are shown in Fig. 12 "h" and "i" respectively.

end show that the intensity of light emitted in this region is reduced for $R_m = 5:1$. The small scaled-down version (Case II) demonstrated similar results. A comparison of streak pictures for $R_m = 1.4:1$ and 5:1 show 1) that the light intensity for $R_m = 1.4:1$ is largest outside the mirror region and 2) that the light intensity for $R_m = 5.0:1$ on a relative basis, is largest between the mirrors. As the mirror ratio increases, these results suggest, in agreement with magnetic probe measurement, that the plasma is confined more efficiently between the mirrors and plasma end-losses are reduced at the sacrifice of plasma stability.

At a mirror ratio of 1.18:1 (Case II) high-frequency radial oscillations of light intensity similar to those observed by magnetic probes are observed during the time of trapped reversed magnetic field in the second and third half-cycles. At $z = 0$, these oscillations are seen while at $z = 2.5$ cm they are either absent or below film sensitivity. Two streak photographs taken at $z = 0$ are shown in Fig. 11 (the start of the first half-cycle is faintly visible). These photographs seem to substantiate the findings of magnetic probes and lend support to the fact that the plasma undergoes strong radial and axial perturbations primarily in the midplane region which may cause the plasma to move away from the midplane as indicated by the net magnetic pressure distributions of Fig. 9.

Peculiar to these photographs is the time interval following the initial implosion or high-frequency light intensity oscillations. There appears a faint background of general illumination which is interrupted by the start of the third half-cycle compression. Usually the same pattern is repeated during the third half-cycle; an exception is shown in Fig. 11 (b). Neutron yield, if present, begins in time near the end of or during the high-frequency light oscillations and extends throughout the weak illuminated region. Under some conditions, transverse streak photographs at $z \geq 0$ show intense irregular light intensity patterns during the third half-cycle which signify increased contamination consistent with the influx of wall impurities. The appearance of this light in many cases reduces neutron production below a detectable number.

Scaling down from the large to the small mirror system Case I to Case II and for mirror ratios close to 1.0, streak photographs show generally an increased illumination during the fourth and subsequent half-cycles for discharges at 18.5—20 kV. The slope of the light intensity vs time indicates that a heavy wall contaminant is the major constituent. These data suggest that a high temperature plasma is confined during the second and third half-cycles but as a result of the decreasing strength of the confining field, the hot plasma expands to the walls causing intense wall evaporation which subsequently forms a heavy gas pinch. Furthermore, the intense radiation (bremsstrahlung) or particle loss to the walls during the second half-cycle may as well contribute to the onset of wall impurities frequently observed during the third half-cycle.

3.3 Neutrons

The pulse shape and duration of neutron production is more important in distinguishing the effect of mirror ratios and contamination effects than the number of neutrons produced in the orthogonal pinch discharges. The average neutron yield per discharge, shown in Table I, is representative of a few discharges and should not be taken as a figure of merit for a particular geometry or mirror ratio. Neutron production is not observed during the first half discharge cycle.

The neutron pulse is recorded by a high-gain photomultiplier-crystal (2-inch × 2-inch plastic scintillator) network (integration constant of 0.1 μs) and total neutron emission by an array of 4 paralleled silver-activated geiger tubes enclosed in paraffin.

The start of neutron emission, except for mirror ratio $R_m = 5:1$, is restricted in time to the region of reversed magnetic field before the transition or pronounced intermixing of magnetic fields. Similarly, it can be said that emission does not start immediately on the first dynamic bounce but waits for $\sim 2 - 2.5$ μs in the geometries of Case I, $R_m = 1.4:1, 1.3:1$ and 1.18:1. In Case II geometries, $R_m = 1.18:1$, 1.1:1 and 1.02:1, where the field rise times and physical dimensions are larger and smaller respectively, neutron emission begins $\sim 0.4 - 0.6$ μs after the first dynamic compression. For either geometry, the time of emission is associated generally with a decrease in the trapped reverse magnetic field. Since the trapped field configuration changes as a function of z and since the axial distribution of neutron production is not known, it is impossible to associate the start of neutron production with a particular field configuration as shown typically in Fig. 8. The hydromagnetic oscillations in the trapped field during the second half-cycle mentioned previously, which are pronounced for lower mirror ratios near the midplane ($z = 0$) of the coil, damp considerably at the beginning of neutron emission and are assumed not directly connected with neutron production.

Several examples of neutron pulses are shown in Fig. 13 for Case II geometry and mirror ratios 1.18:1, 1.1:1, 1.02:1, and 1.025:1 at several applied voltages along with a magnetic field trace. Simultaneous streak photographs were taken, not at the same sweep speed, to demonstrate that very little visible light was present during the time of neutron emission. The neutron pulses in Fig. 12 (h) and (i) and streak photographs in Fig. 11 (a) top and bottom were recorded for the same discharge, respectively. When a small amount of visible light is detected by streak photographs during the third half-cycle, the neutron yield during this cycle is invariably small or zero.

The neutron pulses in Fig. 12 were obtained under various operating conditions, see Table II. One type of pulse, shown for example in Fig. 12 (a), is classified as an extended neutron pulse. Instead of the pulse returning to zero as expected during the time the confining field passes through zero, neutron production remains finite. The shape of the pulse during the

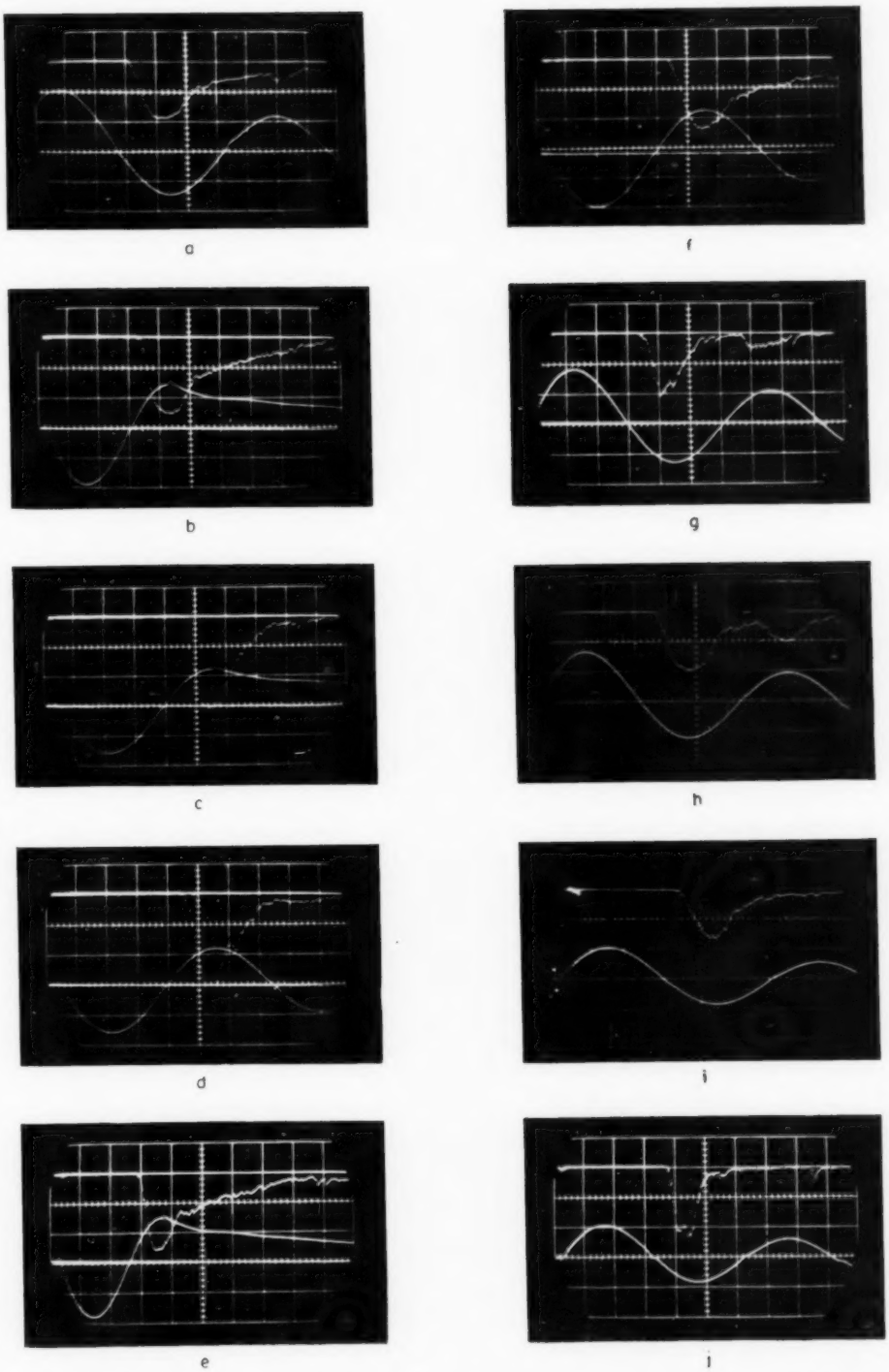


Fig. 12 Examples of neutron pulse shapes for several mirror ratios and applied voltages (see Table II). The shapes of the neutron pulse show that the rate of rise and decay of neutron production is not generally symmetrical about peak field but exhibits in many cases an extended tail compatible with plasma confinement from walls as the magnetic confining field reverses in sign (magnetic field is shown below each pulse).

TABLE II. Discharge parameters for Fig. 12, Case II geometry.

No.	R_m	V_0 (kV)	p (D_2) (10^{-3}mm Hg)	Sweep (μs)
a	1.02:1	20	150	2.0
b	1.025:1	20[S]	200	2.4
c	1.025:1	17.5[S]	135	2.0
d	1.025:1	17.5	135	2.0
e	1.025:1	20[S]	135	2.9
f	1.025:1	20	135	2.0
g	1.09:1[x]	18 5	135	2 5
h	1.1:1	18.5	150	2.0
i	1.18:1	20	135	2.0
j	1.02:1	18.5[y]	190	2.4

S Refers to crowbarred discharge at peak field of second half-cycle.
x Case IV geometry (ceramic tube).
y Air leak introduced at the mirror; neutron pulse in Fig. 12 (j) is typical of a contaminated discharge.

second half-cycle compression may show 1) a gradual fall-off of the second half-cycle neutron pulse continuing through the third half-cycle, see Fig. 12 (a), or 2) a second pulse of neutrons superimposed on the second half-cycle tail as a result of the third half-cycle recompression, Fig. 12 (h). The neutron pulse reaches a maximum at the peak of the magnetic field (second half-cycle). The sustainment of neutron yield during the time B_z passes through zero and reverses in sign can be interpreted in terms of plasma confinement by internal circulating θ currents. Streak photographs give no evidence of plasma striking the tube walls at this time and it is supposed that a second current sheath forms near the tube walls in a pressureless but highly conducting plasma similar to that suggested by COLGATE for the normal pinch effect [16].

Magnetic probes show a trapped field at the start of the third half-cycle similar to that measured at the beginning of the second half-cycle. The residual plasma and magnetic field remaining near the center is recompressed by a new current sheath formed by the gas left originally outside. The residual particle density external to the plasma need be only a fraction of the starting pressure and yet have large enough conductivity to form a new current sheath at a time when the azimuthal electric field E_θ approaches its maximum value ($B_z \rightarrow 0$). In this manner, the residual second half-cycle plasma may be insulated temporarily from the glass walls while the external field passes through zero.

In addition to this class of neutron pulses which yields the largest neutron number, there are other variations. For example, Fig. 1 (2i) shows a pulse rising in much the same way centered about peak magnetic field and then falling slowly to zero during the same half-cycle.

The other variation in neutron pulse, shown in Fig. 12 (g) and (j), peaks ahead of peak magnetic field (unlike those discussed above) and exhibits a sharp break in an otherwise smooth rise. In most of the geometries, a shaped Pyrex vessel is employed fitting approximately the contour of the driving coil. Upon insertion of a new discharge tube, several "conditioning" discharges are generally required before neutron production is maximized. During the "conditioning" period, neutron pulse shapes show the effect of contamination, Fig. 12 (j), but after ~10 discharges become centered about peak magnetic field. Further evidence for impurities being responsible for the asymmetrical pulse shape was obtained with the contoured geometries. By accidentally producing a crack in the Pyrex tube wall within the driving coil, a small quantity of air was admitted to the D_2 gas flow. This had the result of shifting the peak of the neutron pulse ahead of peak magnetic field, see Fig. 13 (j).

In another instance, a high alumina ceramic tube [2] (96% purity) was investigated. The electrical and geometrical parameters are tabulated in Table I under Case IV. The electrical parameters for Case IV $R_m = 1.09:1$ are almost identical to those for Case II $R_m = 1.1:1$ whereas the geometrical dimensions are different. The results, in comparison to Case II $R_m = 1.1:1$ employing a contoured Pyrex tube, show that 1) the average neutron yield is lower by a factor of 2—3, 2) the neutron pulse shape is generally asymmetrical, see Fig. 12 (g) or (j), 3) large light intensity is emitted from the discharge and 4) large bursts of hard x rays are detected frequently during the third half-cycle and always during the fourth and subsequent half-cycles. These x-ray bursts are also observed in a helium discharge. Except for the x-ray observations, the results are similar to those for a straight (uncontoured) Pyrex discharge tube. These results would suggest that the shape of the

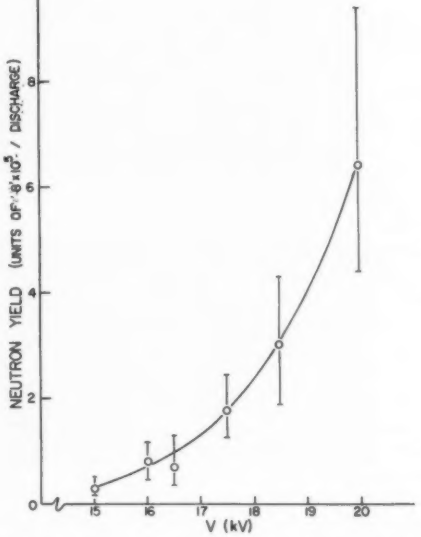


Fig. 13 Neutron yield as a function of applied voltage for $R_m = 1.02:1$ Case II, p (D_2) = 135 μ Hg.

discharge tube is more important than the kind of wall material at least for magnetic field densities within the coil of 20—25 J/cm³.

In a few cases, see footnote "a" in Table I, in which straight cylindrical (noncontoured) discharge tubes were used, neutron pulse shapes were generally asymmetrical which, of course, reflected in the total yield. Under these conditions, according to visual observation and streak photographs, the light intensity had increased; in fact, the technique of visually observing the visible light turned out to be an indication of whether or not neutrons were produced. Under these conditions, the majority of discharges produced intense visible light and asymmetrical neutron pulses which peaked ahead of peak magnetic field.

The explanation for this behavior, it is believed, centers around the initial stages of sheath formation at the walls of the discharge tube. It is felt that the current sheath forms near the inner surface of the glass tube along a magnetic flux surface where the electric field E_θ is approximately constant as a function of z. If the diameter of the discharge tube is uniform in z, i.e., tube diameter = mirror exit diameter, the lines of magnetic force that necessarily follow the inner contour of the driving coil will intersect the glass walls. Under these conditions, a plasma may drift along the line of force during the early stages of sheath detachment, strike the wall and cause evaporation and sputtering of the tube walls. The formation of a clean D_2 current sheath as a function of z becomes almost impossible under these conditions, with the consequence that impurity contamination is swept up by the collapsing current sheath. The speed of sheath formation and detachment from the wall may minimize the influx of wall impurities, however. In the straight tube experiments, operating under identical conditions as for a contoured Pyrex tube, the neutron yield on the average was lower by a factor of 3—5 and showed an asymmetrical pulse shape. The difference in the contoured versus straight tube experiments might better be explained in terms of variation in E_θ and the radial sheath velocity as a function of z.

A study of the neutron yield as a function of applied voltage for Case II, $R_m = 1.02:1$, shows that the average neutron yield increases by a factor of ~20 for a 30% increase in voltage above 15 kV. These data are shown in Fig. 13. For Case I, $R_m = 1.18:1$, the yield increased by a factor of ~10 for a similar increase in voltage. These results suggest, with reference to the next paragraph, that $B_z^2/8\pi$ may be the effective parameter only after the current layer is detached from the wall.

When the geometry of Case I, $R_m = 1.18:1$, was scaled down by a factor of 2, keeping the aspect ratio D/L and mirror ratio R_m constant, the neutron yield increased only by a factor of ~2 for an approximate fivefold increase in energy density, B_z (Case II) ~2.2 B_z (Case I). It was necessary to increase the initial deuterium pressure from ~80 — 135 μ Hg in order to optimize neutron yields.

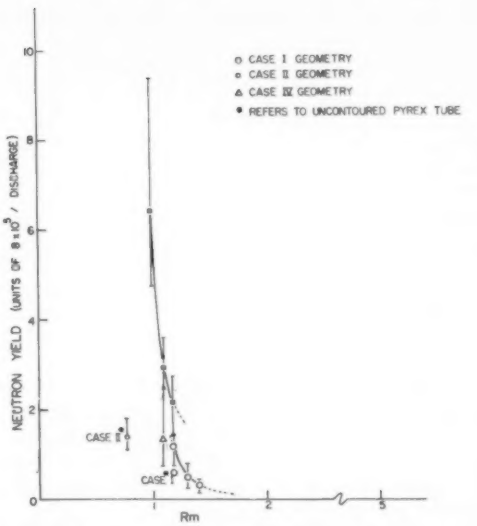


Fig. 14 Neutron yield as a function of mirror ratio.

From these results, it appears that the initial stages of ionization leading to sheath formation are far more critically dependent on the pressure and applied electric field (E_θ); e.g., variations in the formation and detachment time of a conducting layer from the wall influences the fraction of trapped field which in turn affects the compressions and/or heating of the plasma. The attempt to extend the above results by scaling from Case II to Case III at $R_m = 1.02:1$ failed. In this instance the increased magnetic field pressure at the inner surface of the mirror and on the face of the coil mechanically stressed the coil material beyond the yield point causing permanent surface damage. Coils made from ordinary face machining brass (60% Cu—40% Zn) or aluminium (Dural) show severe surface cracks* without extensive surface deformation. Less brittle materials like copper, silver or brass alloy of higher copper content show no surface cracking but instead show extensive surface deformation. Stainless steel at these field pressures does not exhibit the above phenomena.

The mirror ratio as defined,* turns out to be a critical parameter** which sensitively affects neutron production. The trend in the neutron yield as a function of mirror ratio is shown in Fig. 14 for the geometries I and II. For Case I, the yield increases, on the average, a factor of ~4 for a decrease in R_m from 1.4:1 to 1.18:1. After geometrical scaling to Case II geometry at $R_m = 1.18:1$, the yield increased a factor of ~3 for a decrease of R_m from 1.18:1 to 1.02:1. This behavior is contrary to expectations on the basis of less axial confinement as $R_m \to 1$; however, it may be understood in terms of a more uniform gas breakdown and sheath formation as

* See footnote at left on page 235.

** This critical parameter might better describe the spatial variation of the axial B_z field as a function of z and r.

the result of the improved uniformity of the B_z field as a function of z and r.

Because of the rapidly increasing neutron yield as $R_m \rightarrow 1$, the ratio was reduced below 1 to an expected value of 0.9:1. Because of the sensitivity of the mirror ratio R_m to the diameter of the mirror section, the B_m/B_0 ratio turned out to be 0.77:1. This point is shown in Fig. 14 as Case I* in which the asterisk refers to an uncontoured Pyrex tube. All previous mirror ratios ($R_m > 1$) were chosen on the basis of the availability of standard Pyrex glass tubing in order to maintain the contoured glass design previously discussed. For $R_m < 1$, it was necessary to employ straight (uncontoured) Pyrex tubes. The large reduction in neutron yield for a change in mirror ratio from $R_m = 1.02:1$ to $R_m = 0.77:1$ is attributed in part to wall contamination produced by the noncontoured (straight) glass discharge tube and also to the fact that the plasma tends to be expelled from the midplane as a result of the negative field gradient along the z axis.

It is strongly felt that there exists a maximum in the neutron yield vs mirror ratio in the vicinity of $R_m = 1$; it is also believed that this maximum is not singularly dependent on mirror ratio as defined but depends as well on the radial distribution of the axial B_z field in the mirror region of the coil. In this report, the mirror ratio was reduced by increasing the diameter of the mirror section; this tends to make B_z vs r more uniform in the mirror region.

3.4 X RAYS

Measurements of soft x-rays from the orthogonal pinch for Case II $R_m = 1.025:1$ were made with a pinhole camera technique [19]. The pinhole, 1/3 mm diameter, viewed the cross section of the discharge in an axial direction at a distance of 35 cm from the midplane of the coil. The x-ray film was placed 13 cm from the pinhole giving an image reduction of ~3. The pinhole was covered by three layers of aluminum-Zapon foil*, each foil consisting of 50 μg/cm² of aluminum backed by 27 μg/cm² of Zapon. Each layer was opaque to the sun prior to attachment; the composite window (~225 μg/cm²) was tested for light leaks upon completion of the experiments.

The cassette was evacuated to reduce x-ray absorption but maintained at a positive pressure with respect to the discharge in order to prevent breathing of the thin film during film changes.

In Fig. 15 (a), (b), and (c), x-ray exposures refer to D_2 pressures of 135, 175 and 230 microns respectively. Photographs (a) and (c) were obtained with five (3—18.5 and 2—20 kV) discharges whereas (c) has, in addition, four 17.5 kV discharges. The corresponding plasma source diameters range from 2—1.2 cm at the midplane ($z = 0$) in a tube of 6 cm diameter. Neutron production was recorded for each

Fig. 15 Pinhole camera photographs of a D_2 discharge viewed axially. $R_m = 1.025:1$, Case II. Thin window: 150 μg/cm² of aluminum + 75 μg/cm² Zapon backing.

* Thin aluminum foils were provided by J. Conner, Los Alamos Scientific Laboratory.

photograph with neutron yield falling as the pressure was increased. Film exposed at 55 microns for 10 discharges showed only a general perceptible blackening; neutron yield at this pressure was below detection although bursts of hard x ray were observed during the first half-cycle with occasional bursts during the second half-cycle.

The interpretation of these data is not unambiguous. It seems unlikely that the exposures are a result of line radiations because of the large absorption coefficients tabulated for photon energies up to 1 keV. The possibility of x ray from a small fraction of high z contaminant is not eliminated except to note that very little visible light is observed generally. With these qualifications, it is possible to analyze these exposures making the basic assumption that the plasma is radiating pure D_2 bremsstrahlung [21] at an electron temperature T_e.

From the transmission characteristics of aluminum as a function of electron temperature and a knowledge of the amount of radiant energy necessary to give a perceptible blackening [19] of the x-ray film, the electron temperature is estimated to be >150 eV. This low result assumes that all the gas initially in the tube is radially compressed a factor of 10 and confined for ~ 7.5 μs with no gas streaming out the mirror. A less pessimistic electron temperature result is obtained from the estimation of the ion temperature based on the neutron yield from a Maxwellized ion distribution and the available number of equilibration times [22] for ion and electron collisions. These considerations give at most an electron temperature of ~ 0.5 keV. The x-ray data are taken as evidence for the existence of an electron temperature in the range of 150—500 eV.

3.5 Loop Measurements

The question concerning the effect of the probe on the magnetic behavior or conductivity of the plasma is of great importance. In order to supplement the magnetic probe data, a series of single-turn loops [23] which measure the enclosed magnetic flux, were placed around the outside of the discharge vessel and

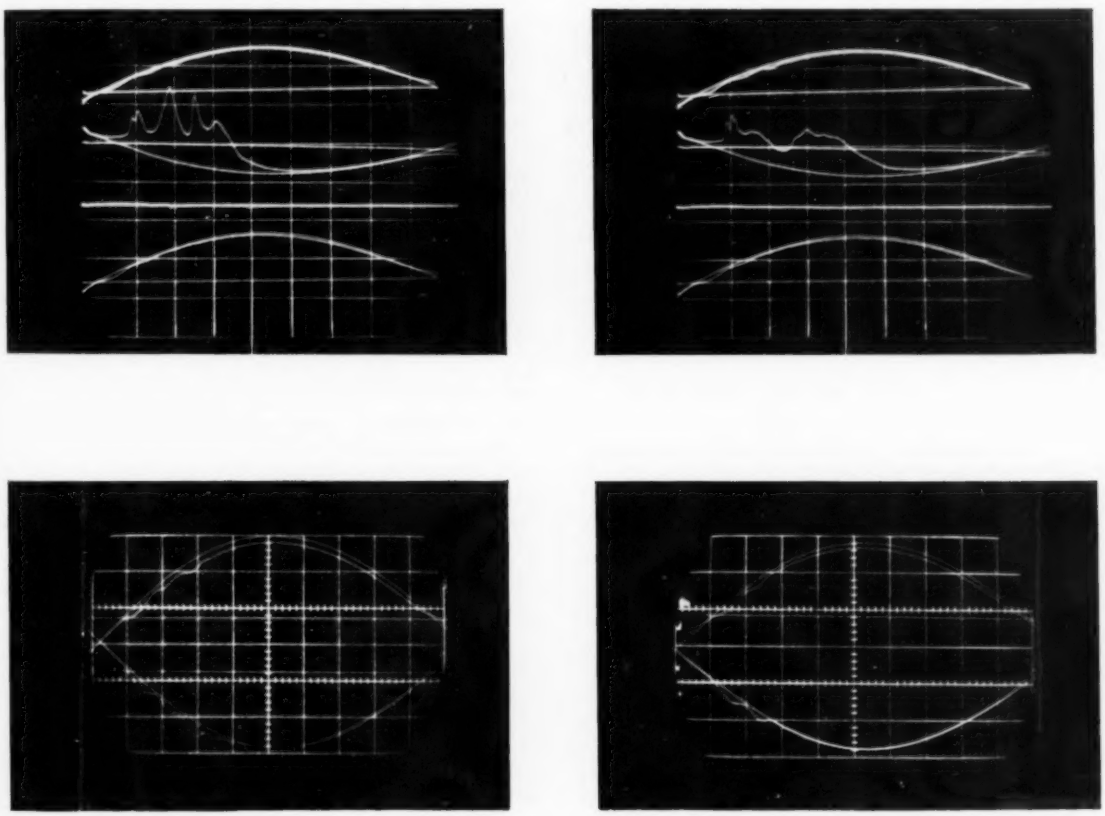


Fig. 16 Internal magnetic probe at $r = 0$ (second trace in top photograph) loop flux and external magnetic field signals (top and bottom trace of lower photograph, respectively) as a function of time. "a" and "b" refer to planes $z = 1$ and 5 cm respectively. Sweep speed 1 μs/cm. $V_0 = 16$ kV, p (D_2) = 80 μ Hg, Case I and $R_m = 1.18:1$.

spaced at equal distances (2 cm) along the axis starting at $z = -1$ cm, see Fig. 3. With a vacuum discharge, the signals were shielded and balanced electrically with respect to the loop at $z = -1$ to yield a null difference signal. Single-loop measurements of the flux were also recorded. The central loop was used as reference and the difference between it and each succeeding loop was measured on an array of two-beam oscilloscopes. The magnetic field outside the glass volume and on-axis were simultaneously measured in the plane of each loop.

A typical set of loop and external magnetic field signals are shown as the lower two oscilloscope traces respectively in Fig. 16 (a) and (b); a refers to $z=1$ cm and b to $z=5$ cm for a D_2 discharge of 80 microns, $V_0=16$ kV, Case I, $R_m=1.18:1$. The vacuum field is superimposed on each trace as reference and, although use is made of the vacuum reference signal in what follows, it should be clear that it only represents the average field for an unloaded coil. While the external field signal shows faithfully the magnetic field in a small region, the circular loop measures a product of two unknown quantities, i.e., the average value of the magnetic field and area.

A comparison of the magnetic field and magnetic flux (loop) signals at $z=1$ and $z=5$ cm shows a slight phase shift; for example, the time variation of the average flux at $z=1$ and $z=4.5$ is not exactly the same. This is shown in Fig. 18 for $R_m=1.18:1$, Case I geometry at $V_0=16$ kV for p (D_2)$=60$ microns. Figure 17 is a plot of the time variation of the ratio B_{gas}/B_{vac} and $\varphi_{gas}/\varphi_{vac}$ at the plane $z=1$ and $z=5$ cm. It is shown in Fig. 17 that oscillations in the external magnetic field last longer at $z=1$ than at $z=5$ whereas the magnetic flux signals show an in-phase character for $\sim 1\frac{1}{4}$ μs which then depart. Beyond $2\frac{1}{2}$ μs, the field and flux at both axial positions remain approximately the same. One unusual point is that the phase relationship between the field B_{gas} and flux φ_{gas} at $z=1$ is not 180° but instead ~90° while at $z=5$, B_{gas} and φ_{gas} are ~180° apart. These data are further evidence that the plasma dynamics is not simple, and rather supports the view, as shown by internal magnetic probes, that the plasma is undergoing simultaneously radial and axial motion. It is certain that trapped reverse magnetic fields are present within the plasma boundary as discussed earlier. From an examination of the axial distribution of B_z field as a function of radius and time (Fig. 9) and the net magnetic pressure distribution (Fig. 10) at peak field time in the region of $z<5$ cm, the data of Fig. 17 would not be inconsistent with the view that the plasma radius near peak magnetic field for $z<4.5$ cm might be smaller than at $z>5$ cm. Although flux data at other z planes $z>5$ cm have not been obtained, the present data are consistent with a plasma model in which the majority of the plasma resides away from the midplane at peak field time, i.e., in a region $5 \leq z < 12$ cm for Case I geometry (symmetry is assumed on the opposite side). Near peak field time, see Fig. 18, the external magnetic fields and enclosed flux at both positions approach a common value. Since the ratio $\varphi_{gas}/\varphi_{vac}$ is <1 at peak field time, it suggests that a fraction of the energy of the power supply has been expended 1) in creating the trapped field, 2) by motional energy in collapsing the gas, and 3) by the diffusion heating of the plasma layer during the conversion of the trapped field energy into plasma energy. The accuracy of the data is not sufficient to make an energy balance.

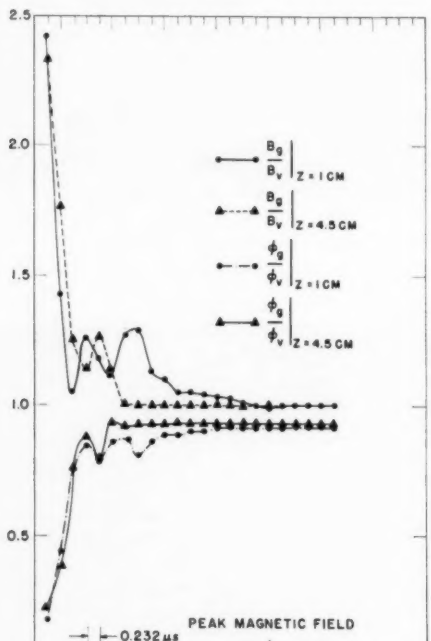


Fig. 17 The ratio of external magnetic field and magnetic flux to their corresponding vacuum (no gas) signals at two z positions as a function of time for the data of Fig. 16. $R_m=1.18:1$, Case I, $V_0=16$ keV, p (D_2)$=80\mu$.

On the basis of the conservation of magnetic flux and a particular plasma model, the data of Fig. 17 can be used for calculation of the plasma radius as a function of time. Two models have been analyzed, 1) a plasma model M-1 in which the plasma is diamagnetic, i.e., all internal magnetic fields as measured by magnetic probes have been ignored and 2) a model M-2 which takes into account the presence of the internal magnetic fields as measured. Figure 18 shows the calculated plasma radius as a function of time for models 1 and 2 at both z positions. Curve M-1 at $z=1$ cm shows that the plasma compresses quickly to a small radius and remains approximately constant over peak magnetic field and shows very little expansion as the confining field decreases. Similar behavior is found at $z=5$ cm except that the plasma is compressed to a smaller radius than at $z=1$ cm. Model M-2, on the other hand, shows that the plasma starts at a more realistic radius consistent with the fact that a fraction of the first half-cycle magnetic field is trapped by a current layer that forms prior to the end

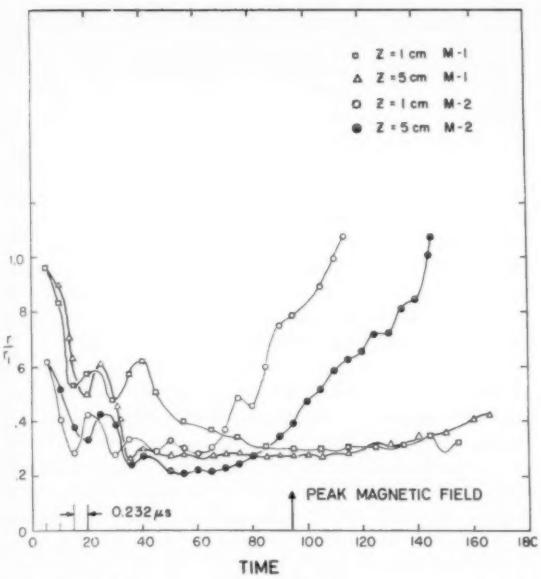


Fig. 19 Calculated radius of the plasma as a function of time on the basis of plasma models M-1 and M-2 defined in text. $t = 0$ is defined when the external driving field passes through zero (beginning of second half-cycle). $R_m = 1.18{:}1$, Case I, $V_0 = 16$ keV, p (D_2) = 80μ.

of the first half-cycle ($t=0$ in Fig. 18 is defined at the beginning of the second half-cycle when the external magnetic field passes through zero). The plasma radius, like that for M-1, reaches a smaller radius at $z=5$ cm than at $z=1$ cm, but unlike M-1, the radius begins to increase slowly toward the end of the radial oscillation period, increasing at a much faster rate for the plasma at $z=1$ cm than at $z=5$ cm. The plasma, according to this model, approaches the wall at ~1.5—2.0μs after peak field. This is partially a result of taking small differences occurring in the simple radius calculation, and represents the breakdown of the simple M-2 model. Furthermore, the internal magnetic field [second trace of top photograph, Figs. 17(a) and (b)] used in the calculation is valid only at $r=0$ and should be replaced by an average magnetic field over a larger radial distance. In spite of these effects, it is felt that M-2 is a more realistic approach to the actual situation because it involves the internal magnetic field which changes in sign from a trapped reverse field to the direction of the confining field. On the basis of intermixing heating, which increases plasma energy and temperature at the expense of the magnetic field energy, it is impossible for the plasma pressure to increase beyond that given by a net $B^2/8\pi$, i.e., for confinement. In order for the plasma pressure to be kept in balance, the plasma must expand either in radius or along the axis or both (diffusion of plasma and field). The concept of intermixing heating causing an increase in plasma energy and radius fits Model 2 up to a turning point which depends on a precise knowledge of the magnetic fields and normalizations. The radius vs time curve in M-1 leads to the embarrassing situation that the plasma is confined to an approximately constant radius as the confining field decreases toward zero. However, if true, the plasma pressure or particle density is diminished at a rate which maintains the pressure balance (plasma end streaming).

The insensitivity of the loop to small changes in plasma volumes is a serious factor to a detailed analysis. In fact, the presence of a reverse magnetic field and its return flux add further complexities to the possibility of ascertaining the correct plasma model.

3.6 Azimuthal asymmetry in the B_z field

In a pulsed mirror geometry, Fig. 3(a), the conservation of magnetic flux is assumed throughout the coil length (skin depth $\ll$ wall thickness). At the ends of the coil, the area available to the return flux is axially asymmetric and diminished as a result of the cross-sectional configuration of the coil, Fig. 3(b). The magnetic field asymmetry produced can be visualized by considering that the magnetic field is made up of imaginary lines of force which thread the coil. For a cylindrically symmetric coil, the number of emerging lines (flux density) is uniform in azimuth at the coil end. For a coil of nonuniform cross-sectional area, Fig. 3(b), the flux density is not uniform in azimuth because some of the lines of force that would have returned around the outside through the angular segment occupied by the feedpoint connection to the coil now are crowded (because of skin effect) into the remaining angular region. The main effect of the metal irregularities in the coil cross-section would appear to increase the magnetic field at those azimuths where the path length $d\mathbf{l}$ in the line integral $\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l}$ is a minimum. For the mirror geometry of Fig. 3(b), a minimum in the B_z field or flux density would be expected in the vicinity of the current connection.

The magnetic phenomenon, commonly referred to as the "magnetic saw effect" demonstrates vividly that the magnetic field is not uniform in azimuth especially in the mirror regions. Figure 19 shows an end view of the mirror geometry, Case III. As the magnetic field is increased, the material, in this case brass, begins to show surface depressions or surface cracks nonuniformly in azimuth. At high magnetic fields (~200 kG) the effect is clearly shown after one discharge. The radial cracks also extend backward through the coil along the mirror surface for ≈ 1.5 cm showing that the field asymmetry produced by the irregularities in the outer surface at the coil are coupled to the field distribution in the mirror region. Once the cracks are produced, then growth is enhanced by local magnetic pressures due to θ surface currents and by sparking across the crack due to $L\,di/dt$ voltages.

The effect of this type of field asymmetry on the behavior of a plasma was established by measuring the nuclear yield from a D_2 plasma in the Case II geometry $R_m = 1.02{:}1$. Magnetic field perturbations were produced by 1) the fringing magnetic field of a small bar magnet (~70 gauss) placed alongside the

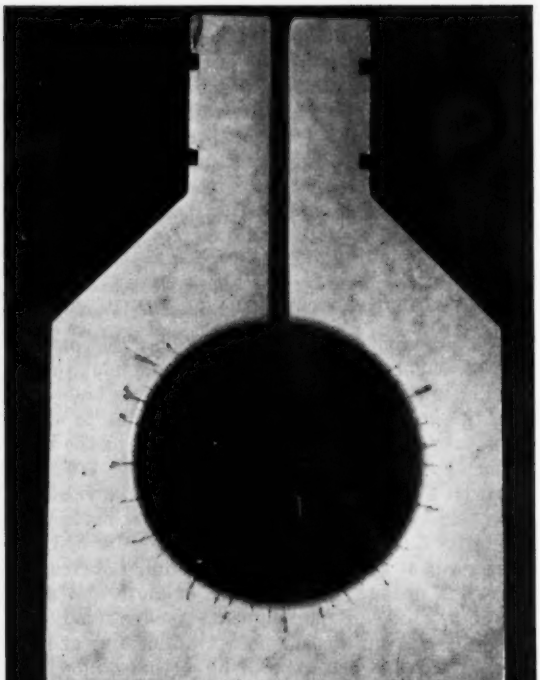


Fig. 20 End view of mirror coil, Case III, $R_m = 1.02:1$ geometry showing angular variation of surface cracks caused by local region of higher magnetic field.

coil, and 2) a bar of metal (1 in. × 10 in. × 10 in.) placed with the small dimension in contact with the coil surfaces forming a radial metal fin along the coil length. The latter perturbation approximated the effects of the bulky feedpoint connection and transmission line while the former was strictly a field disturbance that varied from ~70 gauss at the top to ~30 gauss at the bottom of the discharge tube. Both methods of field perturbation separately cause a decrease in the neutron yield by a factor of ~3 although probe measurements in vacuum, show no large field asymmetry.

The overall results suggest that small magnetic field perturbations of ~70 gauss more than likely affect the early stages of preionization leading to the nonuniform formation and detachment of a cylindrically symmetric current sheath than the subsequent dynamics of the sheath. These field asymmetries may induce noncircular electric fields at early times in the discharge cycle causing some ionized particles to strike the tube walls before a current sheath is well established. If this occurs, wall impurities traveling inward with the sheath could well account for the reduction in neutron production. In other ways, field asymmetries may lead to earlier breakup of the plasma. The results of asymmetries produced in this manner emphasize the importance of field symmetry during gas breakdown.

The results of the field asymmetry produced by the feedpoint spacing d between the current connections to the coil, see Fig. 3(b), was observed by the implosion of thin-walled metal cylinders centrally located in the coil. The results for Case II geometry $R_m = 1.02:1$ show that gap spacings of ~0.06 inch lead to nonuniformly collapsed cylinders opposite the feedpoint. When the gap scattering is reduced to 0.010 inch, the symmetry of collapse improves. This result shows that the magnetic force at the feedpoint spacing is weaker with the metal tube *in situ*. Without the tube the B_z field measured across the diameter in line with the feedpoint is constant to 1—2%. In higher mirror-ratio systems in connection with the design of the Megatron [24] field, variations of 5—8% in the axial field are found in the mirror ratio.

The implosion can also be made cylindrically symmetric for gap spacing of 0.06 in. by soldering metal fingers alternately to each side of the gap with each adjacent finger crossing the gap in opposite directions along the inner surface of the coil. This technique [25], which is best explained in terms of the line concept of magnetic fields, directly impedes (by stretching) the movement of a line of force through the metal fingers because of skin effect.

4. Discussion

4.1 Heating of plasma

The magnetic probe study has revealed experimental evidence for field intermixing being the most likely mechanism [26] whereby the plasma can be heated to high temperatures. On the basis of the radial distribution of B_z field shown in Fig. 7, some general statements can be made showing that such a nonadiabatic (irreversible) process can lead to a large increase in plasma energy at the expense of the trapped magnetic energy. The fraction of released magnetic energy is shown to depend on the sign of the trapped field.

To discuss this point, consider a field distribution in which $B_z = B_{z0}$ for $r > a$, and $B_z = \alpha B_{z0}$ ($-1 \leq \alpha \leq 1$) for $r < a$. By applying the conservation of energy and total magnetic flux under static conditions, one obtains the following expression for the energy deposited in the plasma per unit length:

$$W = \frac{B_{z0}^2}{8\pi} V_p \left[(\alpha^2 - 2\alpha + 1)\left(1 - \frac{1}{c}\right) \right] \qquad (3)$$

where $V_p = \pi a^2$ is the final plasma volume per unit length, α represents the fraction of trapped magnetic field and $c = (r_0/a)^2$ is the volume compression factor.

By inserting various values for α in Eq. (1), it is readily seen that W is very sensitive to α taking the value zero for $\alpha = +1$, and $4\,(B^2_{z0} V_p/8\pi)$ for $\alpha = -1$ in the limit of large compressions ($c \to \infty$). For $c = 10$, this reduces to $W_{10} = (0.9)\, W_\infty$ and using $W = 3/2\, nkT$, T can be estimated. With the insertion of a few representative experimental values for Case II, $R_m = 1.02$, taking $n_0 = 1 \times 10^{16}$ particles/cc, $B_{z\,max} = 77$ kG, $c \sim 10$ and $\alpha \sim -0.2$, the sum of the ion and electron temperature turns out to be 1.28 keV.

It is found experimentally that the final magnetic field within the plasma boundary at the peak of the second half-cycle reaches ~0.75 to 0.8 of the external

field resulting* in a $\beta \sim 0.4$. On the basis of a pressure balance calculation, using the same parameters as above, the measured magnetic field can confine at most a plasma temperature ($T_e + T_i$) of ~660 eV at peak magnetic field. Lower particle densities which result from plasma streaming through the mirrors can raise the final gas temperature to almost any arbitrary value.

Perhaps more basic than the ensuing field intermixing process is the question of why such a process occurs. Experiment shows that when a trapped field is present, intermixing or the interdiffusion of fields occurs for all cylindrical geometries. This phenomenon occurs over a wide range of applied voltage, energy and magnetic field rise-times and for the gases argon, helium, deuterium, hydrogen, and air. One proposal for the onset of intermixing deals with a limiting current density and the failure of Ohm's law, $\mathbf{j} = \mathbf{E}\sigma$, i.e., a region is reached where the current-field relation becomes nonlinear and field penetration becomes rapid (higher resistivity). This proposal seems less likely since intermixing has been observed over a wide range of applied voltage and currents. Another and more interesting proposal [27] suggests that at $B_z = 0$, occurring in the B_z vs r distribution, electrons can run away gaining large azimuthal energies. This process, which involves the two-stream electrostatic instability process [28] can lead to radial variations in the amplitude of the electron trajectories in the azimuthal direction (plasma oscillations). As a result, these oscillations are capable of carrying large numbers of runaways away from $B_z = 0$ into regions of positive and negative magnetic field in a sense diffusing rapidly across the field lines. It is also possible for these fast electrons to give up their energies to the ions during the interdiffusion process which might appear as net heating. A detailed treatment of the two-stream instability process (runaway phenomenon) leading to plasma layer breakup and the possible mechanisms of transferring energy to ions is required. Such questions [29] relating to the influence of contaminant ions (both singly and multiply charged) on the instability growth rate should be answered. It is believed that the onset of field intermixing is basic to these pinch geometries and that the ensuing processes (field intermixing and neutron production) are a manifestation of this result. In addition, plasma motion in the axial direction ($\pm z$) produces further complication in any single process.

4.2 Confinement

With some possible process** accounting for high plasma temperatures, neutron production is not too surprising. What is surprising though is the fact that neutron production remains finite through a B_z zero with a substantial neutron yield during the third half-cycle, Fig. 13. Streak photographs show little or no visible light at the walls of the vessel during the fall of the second half-cycle magnetic field. Although the plasma must expand while the external magnetic field decreases, the plasma may be prevented from making contact with the wall by a secondary current layer. This phenomenon of confinement can be looked upon as produced by a short circuit or crowbar current layer near the tube walls which shields the main discharge and which limits the tendency for the plasma and field to interdiffuse uniformly in radius during the decrease in the external driving field. This crowbar current layer, similar to that observed in a normal pinch discharge [16], can be produced conceivably by a highly conducting low-pressure gas layer (pressureless plasma) near the tube wall as the external magnetic field decreases toward zero. There are no indications from external magnetic flux (loop) measurements that recompression of the residual second half-cycle plasma has occurred until a few tenths of microseconds prior to $B_z = 0$. At this time a luminous front (streak photograph) is observed to detach from the wall and implode during the third half-cycle. Magnetic flux measurements at the time of a $B_z = 0$ show a trapped flux of short duration, subsequently taking the sign of the second half-cycle magnetic field as the current sheath is detached and compressed. Internal magnetic probes show the formation of a trapped reversed magnetic field similar to that observed during the critical phases of the second half-cycle compression. Although the physical reasons to explain these experimental facts are not known at this time, we are certain that the plasma remains away from the wall during the decreasing portion of the second half-cycle and is frequently recompressed during the third half-cycle.

Smear photographs and magnetic probes show that plasma end losses are increased as the mirror ratio decreases. On the basis of a confined thermal plasma in cylindrical geometry, the particle loss rate Q can be shown to depend on nvR^2 where n is the particle density, v the mean thermal speed and R^2 the exit aperture. In these experiments, the streaming plasma in the mirror would reduce the effectiveness of the mirror field to confine and provide an exit aperture much larger than expected (based on a single-particle model). Although plasma end-streaming is evident throughout most of the second half and remaining discharge cycles, the rate of decay of the neutron yield at peak magnetic field appears dominated at first by the decrease of the particle density as the plasma radius expands (plasma and field diffusion) and later by the depletion of the particle density as a direct result of end streaming (note two distinct decay rates of the extended neutron pulses in Fig. 13).

Confinement of the plasma between the mirror ends became more effective as the mirror ratio was increased from 1.4:1 to 5:1. In the latter case, according to streak photographs taken along the tube axis external to the mirror, axial confinement of the plasma was improved; however, transverse photographs of the plasma between the mirror showed chaotic motion

* $\beta = nkT/(B_z^2/8\pi)$, where B_z is the external magnetic field.

** Deuteron acceleration processes leading to an anisotropic neutron energy distribution have been omitted on the basis of the proton energy measurements. However, axial plasma acceleration processes similar to colliding plasma jets would develop only a small or negligible neutron energy shift.

of a highly luminous plasma which appeared to undergo large amplitude radial displacements. The lines of magnetic force, in the 5:1 case, have very pronounced curvatures and lead theoretically to a growth of the plasma-field interchange instability. The experimental results, probes and smear photograph, support the view that the plasma breaks up rapidly into isolated blobs or a general mist for $R_m = 5:1$ and, in contrast to the lower R_m, shows no detectable neutron yield.

4.3. Neutrons

The question as to whether neutrons are produced as a result of accelerated motions, instability growths or from a thermalized plasma remains in a very unsatisfactory state. However, experimental evidence taken in its entirety favors the interpretation that the plasma is heated by the conversion of trapped reverse field energy to plasma energy during the intermixing of fields and that the heated plasma is confined from the walls during the fall of the magnetic field by circulating θ currents (self-crowbar currents) formed near the insulating wall. From the duration and shape of the neutron pulse during the second and third half cycle and from an estimation of the number of relaxation times available based on a conservative estimate of particle density and temperature, a consistent interpretation would tend to discriminate against a direct ion acceleration mechanism in favor of one involving a thermalized plasma [30].

Although plasma heating, in these experiments, can be achieved by the intermixing of magnetic field and plasma, a combination of processes, involving 1) the annihilation of the trapped reverse magnetic field leading to complete intermixing of plasma and field, 2) adiabatic compression of the heated plasma after the trapped field is reduced to zero and 3) the continued interdiffusion of plasma and field beyond peak magnetic field on a much reduced scale, is not inconsistent with the observations.

If a plasma temperature T_i can be assigned on the basis of neutron yield, time duration (10 μs), initial density 10^{16}/cc and radial compression ($\sim$10), the ion temperature would be $\sim$0.5 keV. In these experiments, the final plasma volume and particle density in the presence of plasma end streaming are not known accurately; however, if these neutrons arise from a thermal plasma, then $T_i \approx 0.5$ keV, based on the initial density and radial compression, represents a lower limit for the ion temperature.

5. Acknowledgments

The author wishes to thank J. L. Tuck for his reading of the manuscript and criticism. The author also wishes to express thanks to J. A. Phillips for many stimulating discussions and helpful and critical comments during the preparation of the manuscript; to A. H. Williams and Glen Livermore for their invaluable assistance in making the experiment a success; and to E. Stovall for assistance in machine coding some early magnetic probe data.

This work was performed under the auspices of the United States Atomic Energy Commission.

References

[1] Mather, J. W., Williams, A. H., *Bull. Am. Phys. Soc., Series II*, **5** (1960) 309.
[2] Boyer, K., Elmore, W. C., Little, E. M., Quinn, W. E., Tuck, J. L., *Phys. Rev.* **119** (1960) 831.
[3] Niblett, G. B. F., Green, T. S., *Proc. Roy. Soc. (London)* **74** (1959) 747.
[4] Kolb, A. C., *Bull. Am. Phys. Soc., Series II*, **5** (1960) 308.
[5] Kvartskhava, I. F., Kervalidze, K. N., Gvaladze, J. S., Proc. of International Conference on Ionization Phenomena in Gases, Uppsala (North-Holland Pub. Co., Amsterdam) **2** (1959) 876.
[6] Osovetz, S. M., Nasedkiro, Y. F., Pavlov, E. I., Petrov, Y. F., Schedrin, N. I., Proceedings of Second U.N. International Conference on Peaceful Uses of Atomic Energy, Geneva **32** (1958) 311.
[7] Fay, H., Hintz, E., Jordan, H. L., Proc. of Fourth International Conference on Ionization Phenomena in Gases, Uppsala (North-Holland Pub. Co., Amsterdam) **2** (1959) 1046.
[8] Allen, J. E., Segre, S. E., Proc. of Fourth International Conference on Ionization Phenomena in Gases, Uppsala (North-Holland, Pub. Co., Amsterdam) **2** (1960) 1073.
[9] Josephson, V., Dazey, M., Wuerker, R., *Bull. Am. Phys. Soc., Series II*, **6** (1961) 203.
[10] Garwin, R., Rosenbluth, M. N., United States Atomic Energy Commission Report LA-1850 (1956).
[11] Wilson, R. (the "Jug" experiment was an outgrowth of a suggestion to J. L. Tuck by R. Wilson in private communication, 1953).
[12] Mather, J. W., *Bull. Am. Phys. Soc., Series II*, **4** (1959) 118.
[13] Williams, A. H., Mather, J. W., *Rev. Sci. Instr.* **31** (1960) 207.
[14] Williams, A. H., Mather, J. W., *Bull. Am. Phys. Soc., Series II*, **5** (1960) 340.
[15] Tuck, J. L., Proc. of U.N. Second International Conference on Peaceful Uses of Atomic Energy, Geneva, **32** (1958) 3.
[16] Burkhardt, L. C., Lovberg, R. H., Proc. of Second U.N. International Conference on Peaceful Uses of Atomic Energy, Geneva, **32** (1958) 3.
[17] Niblett, G. B. F., Green, T. S., *Nuclear Fusion* **1**, (1960) 42.
[18] Taylor, J. B. Proc. of Conference on Theoretical Aspects of Controlled Fusion Research, Gatlinburg, United States Atomic Energy Commission Report TID-7582 (1959).
[19] Jahoda, F. C., Little, E. M., Quinn, W. E., Sawyer, G. A., Stratton, T. F., *Phys. Rev.* **119** (1960) 843.
[20] Kolb, A. C., Griem, H. R., Faust, W. R., Proc. of International Conference on Ionization Phenomena in Gases, Uppsala (North-Holland Pub. Co., Amsterdam) **2** (1959) 1037.
[21] Post, R. F., *Revs. Modern Phys.* **28** (1956) 338.
[22] Spitzer, L., Jr., Physics of Fully Ionized Gases (Interscience Pub. Inc., New York, 1956).
[23] Furth, H., Lawrence Radiatior Laboratory (technique suggested to measure the diamagnetism of the plasma, private communication).
[24] Rodgers, K., Stevens Institute of Technology (private communication) Semiannual Report SIT-P-21 (10/30).
[25] Osher, J., Los Alamos Scientific Laboratory (private communication).
[26] Schmidt, G., Stevens Institute of Technology (private communication).
[27] Tonks, L. (private communication to H. Dreicer).
[28] Buneman, O., *Phys. Rev.* **115** (1959) 503.
[29] Bostick, W. H., Stevens Institute of Technology (private communication).
[30] Nagle, D. E., Quinn, W. E., Ribe, F. L., Riesenfeld, W. B., *Phys. Rev.* **119** (1960) 857.

(Manuscript received 9 June 1961)

A PARAMETER STUDY OF MAGNETIC COMPRESSION OF PLASMAS WITH END LOSSES

A. C. Kolb, W. R. Faust, A. D. Anderson

United States Naval Research Laboratory, Washington, D.C., U.S.A.

Numerical calculations of the adiabatic compression of a collision-dominated plasma in finite, single-turn coils have been carried out with the initial β and plasma state as parameters. The end losses drastically influenced the character of the discharge, as is observed experimentally. However, the measured heating rate for the electrons is much higher than predicted, pointing to an additional heating mechanism, presumably involving the dissipation of an initially trapped reverse magnetic field in the plasma.

1. Introduction

The slow compression of a high density, collision-dominated, shock-preheated plasma by a rising magnetic field directed along the axis of a single-turn coil affords a method for heating plasmas to the kilovolt range [1—3]. The heating rate has been determined from measurements of the electron temperature by an analysis of the Bremsstrahlung radiation in the soft x-ray region [3]. These observations led to the following numerical calculations of the heating rate for an adiabatic compression of a uniform plasma cylinder containing a trapped magnetic field to determine whether the observed electron temperature can be accounted for by compressional heating or whether some other dissipative mechanism predominates.

The situation is complicated because the magnetic compression is influenced by end losses and these must be taken into account in computing the time-dependence of the density, temperature, plasma radius, etc. In an earlier paper [4] this problem was discussed and some analytical results given for the case $\beta=1$ and for an arbitrarily chosen plasma mirror ratio $R_m=3$. For cases where $\beta<1$ initially, the relevant equations must be solved numerically in order to assess more precisely the influence of β and R_m on the compression. Accordingly, the heating rate has been computed for a range of initial densities and temperatures as well as for various initial $\beta=\beta_0$ and coil lengths. This parameter study serves to hide our experimental ignorance of the actual mirror ratio, the initial conditions produced by the shock implosion, and to see if *any* reasonable set of circumstances can account for the observational data according to the present model. Some preliminary conclusions based on a comparison between the rather limited data and these calculations are discussed in the last section.

Another motivation for carrying out these calculations was to get some idea of the importance of the end losses (by having the coil length and mirror ratio as parameters) in order to guide the extension of a more realistic analysis [5, 6] which takes into account the nonuniformity of the plasma, ion-electron relaxation, thermal conduction, finite conductivity and shock phenomena by solving the full magnetohydrodynamic equations for an infinite cylinder. Also, the present calculations of the effect of end losses on the plasma state and volume serve to estimate the errors introduced by treating the experimentally realizable compression problem (with losses) by exact numerical solutions of the infinite plasma cylinder problem.

2. Formulation of equations

The problem considered here is the compression of a finite cylinder of plasma by an external magnetic field, including the effect of end losses. It is assumed that the plasma is shock-preheated to a uniform initial state, at which time the temperature of both ions and electrons is presumed to be θ_0 (expressed in energy units) while the radius of the plasma is R_0. During the preheating phase, a magnetic field B_0 is trapped within the plasma. Under these conditions the compression results in the loss of ions and electrons from the ends of the cylindrical column, which can be represented by

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Vn_{i,e}) = -\langle M_{i,e}\rangle_{av}\,, \tag{1}$$

where $V=\pi l R^2$ is the volume of the plasma, $n_{i,e}$ denotes the ion and electron densities and $M_{i,e}$ represents the ion and electron loss rates from the mirror regions of the plasma, which is specified later for particular conditions. In addition to the particle losses, the equation for energy conservations leads to

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[V(n_e+n_i)\frac{f\theta}{2}+\frac{VB_p^2}{8\pi}\right] = -\langle\varepsilon_i M_i\rangle_{av}-\langle\varepsilon_e M_e\rangle_{av}-P_m\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\,, \tag{2}$$

where f is the number of degrees of freedom of the particles and B_p is the internal magnetic field in the plasma. ε_i and ε_e are ion and electron energies for particles leaving the system so that $\langle\varepsilon_i M_i\rangle_{av}$, $\langle\varepsilon_e M_e\rangle_{av}$ represent the average energy loss rates due to flow of plasma through the mirror region. For the numerical computations f was taken to be 3 for a collision-dominated plasma ($f=2$ for the radial compression of a low density collision-free plasma). P_m is the magnetic pressure due to the external magnetic field

B which is balanced by the sum of the gas pressure and the pressure produced by the internal magnetic field B_p, viz.

$$P_m \equiv \frac{B^2}{8\pi} = (n_e + n_i)\theta + \frac{B_p^2}{8\pi}. \quad (3)$$

Since it is assumed that the initial internal magnetic field B_0 is trapped in the plasma, the field at any instant is given by flux conservation

$$B_p = \frac{B_0 V_0}{V},$$

where V_0 is the initial volume of the plasma.

The model assumed for the mirror loss is that free flow takes place through apertures of area A at the ends of the plasma cylinder. By use of the elementary result from the kinetic theory of gases regarding efflux, the mirror loss of ions from the plasma is found to be

$$\langle M_{i,e}\rangle_{av} = \frac{V n_{i,e} \bar{c}_i}{2 l R_m}, \quad (4)$$

where $\bar{c}_i = \sqrt{8\theta/m_i}$ is the average ion velocity, l is length of the plasma cylinder, and R_m is the mirror ratio which is defined as the ratio of the area of the bulk of the plasma to the area of the end aperture. It is implicitly assumed here, for simplicity, that R_m is a constant while it may actually be a function of the magnetic field, particle velocity, β, etc. [4, 7, 8] If it is assumed that the plasma as a whole is electrically neutral, then the loss rate of ions and electrons* must be equal so that $M_i = M_e$. This implies that the electron velocity of efflux differs from the electron thermal velocity because of the presence of space-charge electric fields.

The average energy loss $\langle \varepsilon_i M_i\rangle_{av}$ for ions can be written as

$$\langle \varepsilon_i M_i\rangle_{av} \equiv \zeta_i \theta M_i. \quad (5)$$

Now the classical result from the kinetic theory of gases for the average energy of molecules escaping freely from a hole in a container is 2θ rather than the mean kinetic energy $(3/2)\theta$ for the molecules in the container as a whole. Therefore, we take $\zeta_i = 2$ for the ions, i.e. one assumes that no work is done by the plasma as it flows out the ends.

Since the electrons are constrained by electrostatic forces, the free flow value of 2θ for the average energy of escaping ions does not apply and $\zeta_e = 3/2$, corresponding to the thermal energy, is used for the electrons; thus $(\zeta_i M_i + \zeta_e M_e) = \zeta M_i = 7/2\, M_i$ with $\zeta = 7/2$.

To simplify the formulation of the problem for use on a digital computer, the equations are written in terms of the total particle density $n = n_i + n_e$, so that

$$\frac{d}{dt}(Vn) = -(M_i + M_e) = -\frac{V n \bar{c}_i}{2 l R_m} \quad (6)$$

$$\frac{d}{dt}\left(Vn\frac{f\theta}{2} + V\frac{B_p^2}{8\pi}\right) = -\frac{7\theta}{2}\left(\frac{n}{2}\right)\frac{V\bar{c}_i}{2lR_m} - \frac{B^2}{8\pi}\frac{dV}{dt} \quad (7)$$

$$B^2 = 8\pi n\theta + \left(\frac{B_0 V_0}{V}\right)^2. \quad (8)$$

* Hereafter the particle loss rates $\langle M_i\rangle_{av}$, $\langle M_e\rangle_{av}$ are denoted by M_i, M_e.

The neutron yield N in neutrons per second is calculated from

$$\frac{dN}{dt} = \frac{Vn^2}{2}\langle \sigma c_i\rangle_{DD} = \frac{\pi l R^2 n^2}{2}\langle \sigma c_i\rangle_{DD} \quad (9)$$

where, for θ expressed in keV,

$$\langle \sigma c_i\rangle_{DD} = \frac{2.6\times 10^{-14}}{\theta^{2/3}} \exp\left\{\frac{-18.63}{\theta^{1/3}}\right\} \text{cm}^3/\text{s}. \quad (10)$$

It can easily be shown from Eqs. (1)—(4) that the effect of end losses can drastically influence the heating of the remaining plasma during the compression, as derived earlier [4].

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \left(\frac{n_0 V_0}{nV}\right)^{1-(2/f)}\left(\frac{V_0}{V}\right)^{2/f}. \quad (11)$$

To complete the description of the compression process the equation relating dR/dt and the parameters of the electrical discharge system are required. However, the problem may be simplified by assuming that the inductance of the discharge circuit is independent of the plasma radius. If the initial radius of the plasma R_0 is much less than R_c, the radius of the coil, then this is an excellent approximation, and especially so if there is any external inductance. To facilitate computation, the magnetic field in a single-turn coil will be assumed to be given by

$$B = (B_0^2 + 8\pi n_0\theta_0)^{1/2} + 1.256\frac{E}{l}\frac{C}{L}e^{-t/\tau}\sin\omega t, \quad (12)$$

where $\omega = 1/\sqrt{LC}$ and $\tau = (\pi/2)\sqrt{LC}/\ln(1/\delta)$. Here L is the total inductance of the capacitor bank and coil, while C is the total capacitance. E is the voltage to which the bank is charged while δ is the logarithmic decrement $L/2r$, where r is the circuit resistance. The first term is the magnetic field required to confine the plasma and trapped field B_0 at $t = 0$.

In the integration of the equations, the Runge-Kutta method was employed on the NRL digital computer (NAREC). The particular method used was one with error of order $(h)^5$ where h was the interval from one integration step to the next. In the actual computations, values of L and C typical of the existing capacitor banks at NRL were used, and a value of δ was chosen that gave the approximate damping of the observed current.

3. Discussion of numerical results

Calculations for the 20 kilovolt, 250 kilojoule and 2 megajoule NRL capacitor banks were carried out; but the qualitative results can be considered as typical for large magnetic compression experiments.

Figures 1, 2: The time-dependence of θ, n, R, N with the initial β_0 (0.3, 0.6, 1.0) as a parameter are shown for two different initial n_0 and θ_0 (5×10^{16} cm^{-3}, 0.05 keV and 10^{16} cm^{-3}, 0.1 keV) corresponding to density and temperature estimates from numerical solutions [5, 6] of the magnetohydrodynamic equations for the initial implosion and first few oscillations of the plasma column. Coil lengths of 70 cm (diameter:

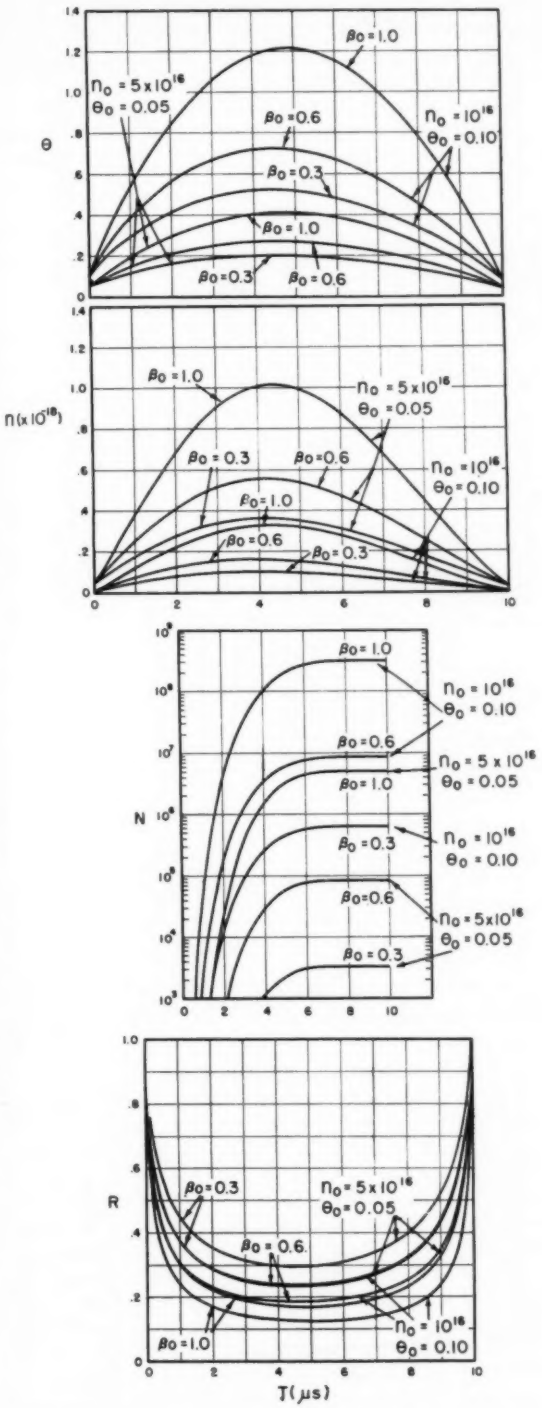


Fig. 1 θ (keV), n (particles per cm^3), N (number of neutrons), and R (relative units) plotted as functions of time for the 285 kilojoule capacitor bank to illustrate their dependence upon β_0. Here $R_m = 3.0$ while $l = 70$ cm.

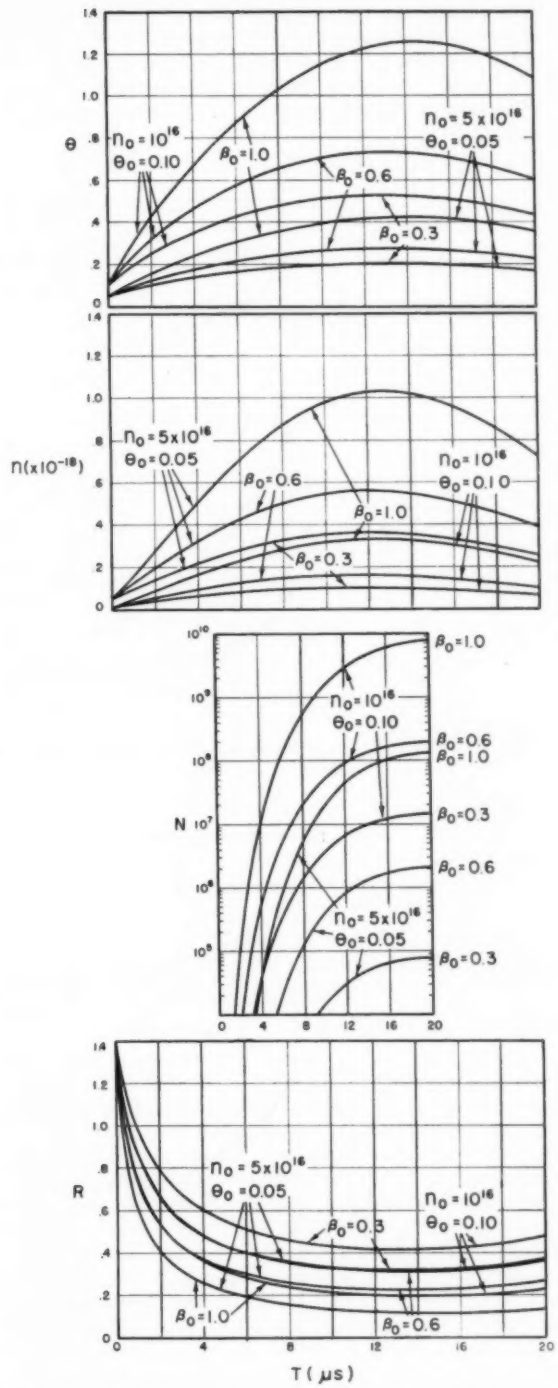


Fig. 2 θ (keV), n (particles per cm^3), N (number of neutrons), and R (relative units) plotted as functions of time for the 2 megajoule capacitor bank to illustrate their dependence upon β_0. Here $R_m = 3.0$ while $l = 180$ cm.

6 cm) and 180 cm (diameter: 10 cm) correspond to experiments now in progress. The final temperature, density, and radius varies by a factor of 2—3 for a range of initial β_0 of about 3, depending slightly on the initial conditions. However, this is reflected in a variation of neutron yield by 2—3 orders of magnitude.

These results, which completely neglect radial nonuniformity of the field and plasma as well as the dissipation of trapped magnetic fields, show that the initial n_0, θ_0 and β_0 at the beginning of the slow compression phase must be accurately known in order to predict with any precision the final plasma state. Furthermore, since the neutron yield is such a sensi-

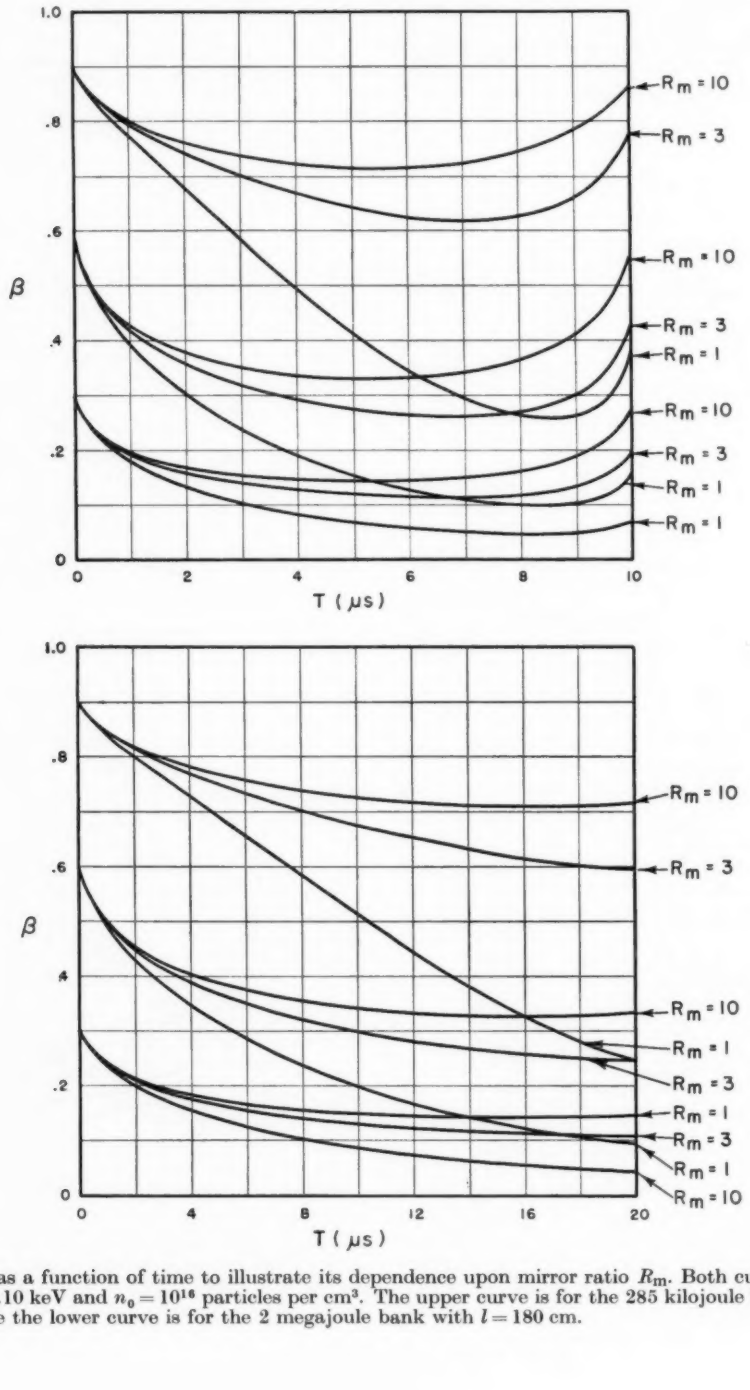


Fig. 3 β plotted as a function of time to illustrate its dependence upon mirror ratio R_m. Both curves are for initial conditions of $\theta = 0.10$ keV and $n_0 = 10^{16}$ particles per cm^3. The upper curve is for the 285 kilojoule bank with a coil of 70 cm length while the lower curve is for the 2 megajoule bank with $l = 180$ cm.

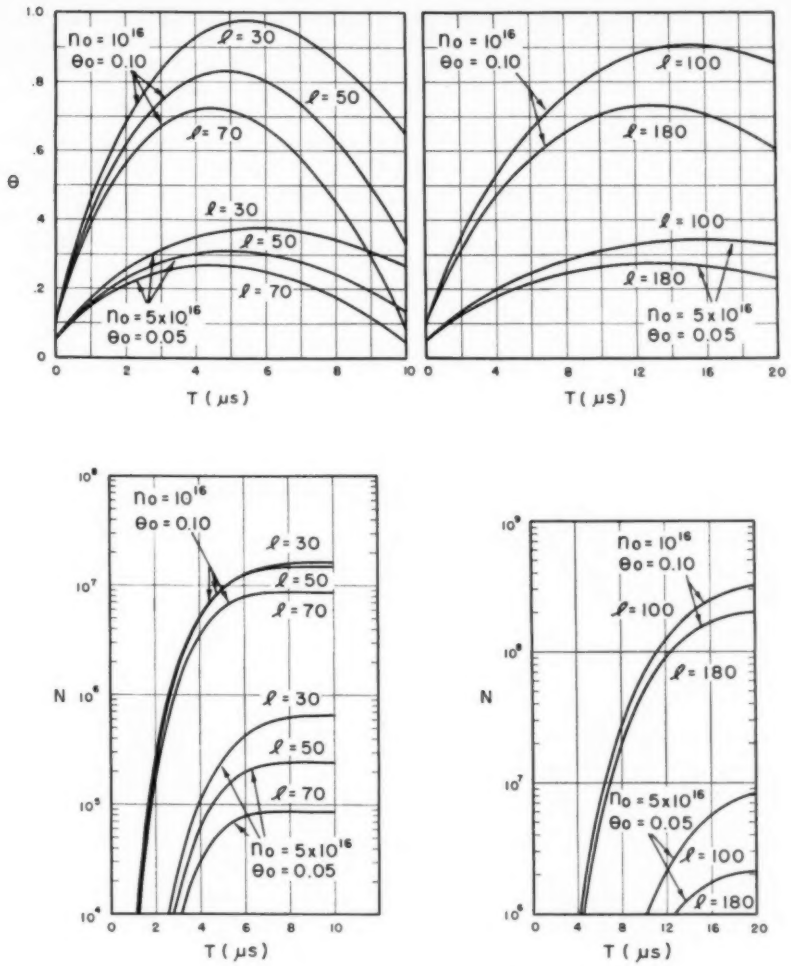


Fig. 4 θ (keV) and N (number of neutrons) plotted as functions of time to illustrate their dependence upon R_m for the 2 megajoule capacitor bank. Initial values of the parameter are $\beta_0 = 0.60$, $\theta_0 = 0.10$ keV and $n_0 = 10^{16}$ particles per cm^3.

tive function of all the parameters of the system, it serves as a very poor thermometer without auxiliary measurements of density, β and plasma volume.

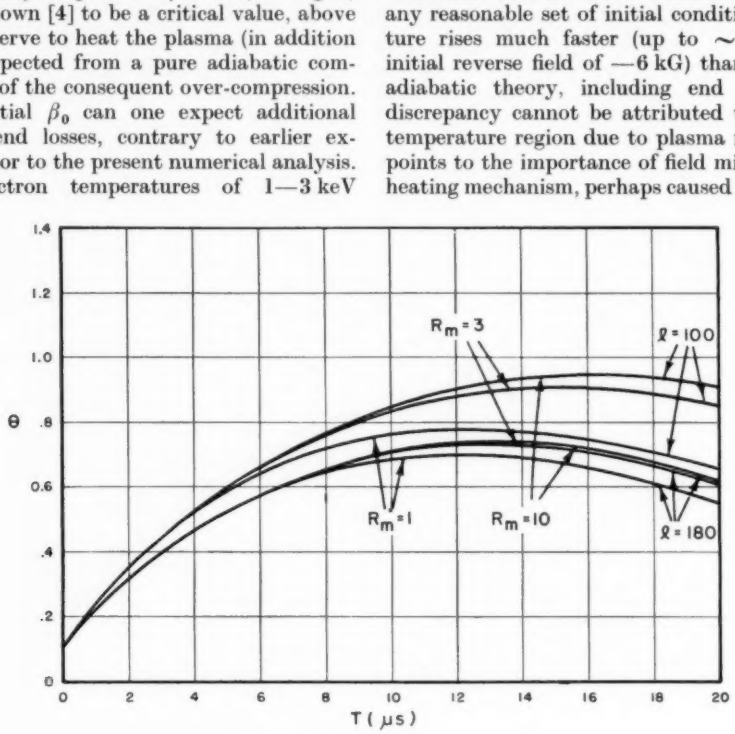
Figure 3: The plasma β drops rapidly with time and depends critically on the mirror ratio for small values of R_m, where end losses cause the plasma to over-compress relative to the case where there are no end losses and the usual adiabatic relations hold. This is because the magnetic field behaves like a two-dimensional fluid with $\gamma = 2$ while the plasma has a $\gamma = 5/3$, corresponding to a three-dimensional fluid. As a result, relatively more work is done in compressing the trapped magnetic field than in heating the plasma causing the β to drop with increasing field strength, even when losses are negligible. These results indicate why it has not been possible to generate high temperatures and neutrons in magnetic compression experiments with poor preionization. Without preheating, the external field penetrates the plasma early in the discharge and the initial β_0, as well as θ_0, is low.

With a reverse field, however, there is always a region where β is nearly unity and additional heating is accomplished by the interdiffusion of the external and trapped fields [9, 10]. The general conclusion here is that without a reverse field, a β_0 of nearly unity would be required with present experimental apparatus to reach kilovolt temperatures by simple shock-heating and adiabatic compression.

Figures 4 and 5: The temperature and neutron yield depend less critically on the coil length and mirror ratio for a given capacitor bank, as is borne out by experimental observations [1, 3] with the 250 kilojoule system. The 2 megajoule experiment is still in the preliminary stages and has as yet yielded no further information on this point. In Fig. 5, it is seen that the final temperature increases with increasing

mirror ratio for initial $\beta_0 \sim 0.6$ (or less). This occurs because the β rapidly drops below $\beta = 0.4$ (See Fig. 3) which has been shown [4] to be a critical value, above which end losses serve to heat the plasma (in addition to the heating expected from a pure adiabatic compression) because of the consequent over-compression. Only at high initial β_0 can one expect additional heating due to end losses, contrary to earlier expectations and prior to the present numerical analysis.

The high electron temperatures of 1—3 keV observed [3] in the 250 kilojoule experiments are not consistent with the above calculated temperatures for any reasonable set of initial conditions. The temperature rises much faster (up to $\sim$1 keV/μs with an initial reverse field of —6 kG) than indicated by the adiabatic theory, including end losses. The large discrepancy cannot be attributed to some very high temperature region due to plasma nonuniformity and points to the importance of field mixing as a powerful heating mechanism, perhaps caused by some instability



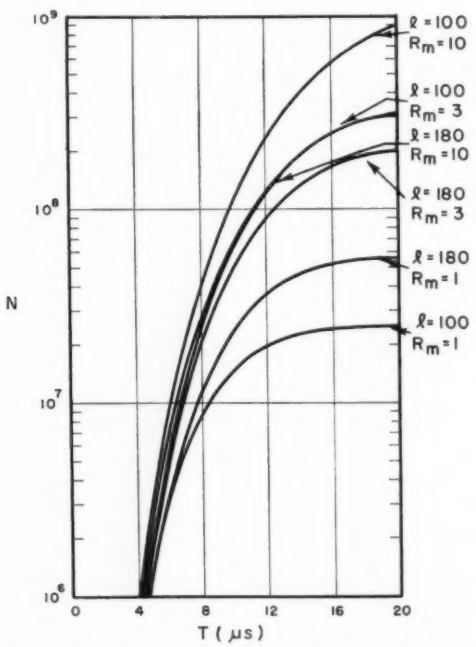


Fig. 5 θ (keV) and N (number of neutrons) plotted as functions of time to illustrate their dependence upon coil length for initial β of 0.60. The two curves on the left correspond to the 285 kilojoule bank while the curves on the right represent the 2 megajoule bank.

of the current sheet which reverses the field. Dissipation of the reverse field which is initially present in the plasma by ohmic heating is now being calculated [6].

The present calculations may still be relevant where the trapped field is in the same direction as the external confining field. Unfortunately, however, the diagnostic measurements for this case are not conclusive because of difficulties in measuring low electron temperatures from soft x-rays. Further experiments with no reverse field, using the higher external fields available with the 2 megajoule capacitor bank, are expected to yield further information on the heating mechanisms because here high electron temperatures and consequent x-ray emission are possible, even without a reverse field.

References

[1] KOLB, A. C., GRIEM, H. R., FAUST, W. R., Proceedings of the Fourth International Conference on Ionization Phenomena in Gases (North Holland Pub. Co., Amsterdam, 1959), p. 1037.

[2] BOYER, K., ELMORE, W. C., LITTLE, E. M., QUINN, W. E., TUCK, J. L., *Phys. Rev.* **119** (1960) 831.

[3] GRIEM, H. R., KOLB, A. C., LUPTON, W. R., PHILLIPS, D. T., *Bull. Am. Phys. Soc., Ser II*, **6** (1961) 205.

[4] KOLB, A. C. *Rev. Mod. Phys.* **32** (1960) 748.

[5] HAIN, K., HAIN, G., ROBERTS, K. V., ROBERTS, S. J., *Z. Naturforschung* **15** a (1960) 1039.

[6] HAIN, K., KOLB, A. C., Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research, Salzburg (Austria), September 1961.

[7] GRAD, H., United States Atomic Energy Commission Report NYO-9355 (Sept. 1960).

[8] ROBERTS, K., *J. Nucl. Energy* **C 1** (1960) 243.

[9] KOLB, A. C., DOBBIE, C. B., GRIEM, H. R., *Phys. Rev. Letters* **3** (1959) 1.

[10] ROSENBLUTH, M. N., Proceedings of Second U.N. International Conference on Peaceful Uses of Atomic Energy, Geneva, **31** (1958) 85.

(Manuscript received 20 June 1961.)

NUCLEAR FUSION 1 (1961)

ENERGY DISTRIBUTIONS OF PROTONS IN DCX

C. F. Barnett, J. L. Dunlap, R. S. Edwards, G. R. Haste, J. A. Ray, R. G. Reinhardt, W. J. Schill, R. M. Warner, E. R. Wells

Oak Ridge National Laboratory

Oak Ridge, Tennessee, U.S.A.

A particle spectrometer has been used to measure the energy distributions of neutral hydrogen atoms escaping from the 300 keV proton storage ring in DCX as the result of electron capture collisions between trapped protons and background gas molecules. A portion of the atoms were converted to protons by passage through an argon-filled gas cell, and the proton beam was then electrostatically analyzed. Energy distributions of the circulating protons were obtained by transformations applied to the measured distributions.

For both gas and carbon arc dissociation the energy distributions were strong functions of the injected H_2^+ current and the location of the region of sampling relative to the median plane. A number of curves are shown illustrating these dependences.

With arc dissociation, the circulating protons lost energy at a rate of about 20 keV/ms with 0.1 mA injected current, and at a rate twice this value when the current was increased to 2.3 mA. Most of the 20 keV/ms loss rate is believed to be due to coulomb collisions of the circulating protons with electrons in the dissociating arc. This loss rate is within a factor of two of that calculated on the basis of loss to electrons of a Maxwellian distribution, well within the accuracy of the arc parameters used in the calculation. Several mechanisms that might account for the additional energy loss rate at higher currents are suggested, but details of the origin of this loss are as yet unclear. The additional energy loss had the consequence of decreasing the mean storage time of the circulating protons.

Measurements with gas dissociation also showed an increase in the rate of energy loss with injected current.

With either arc or gas dissociation, the response of the energy distributions to changes in injected H_2^+ current indicated the presence of a non-collisional dispersing mechanism which increases in importance with increases in injected current. The nature of this mechanism is not clear.

1. Introduction

The DCX approach to the attainment of a controlled thermonuclear reaction has been described previously [1, 2]. Briefly, creation of a dense, high temperature plasma is to be attempted by accelerating diatomic deuterium ions to 600 keV and injecting them into the median plane of a magnetic mirror confinement volume where some of the diatomic ions are dissociated by collisions in a high vacuum carbon arc. The atomic ions thus produced are trapped in the magnetic field because of the change in charge-to-mass ratio. If the density of deuterons can be increased to a critical value, a condition known as burnout [3] presumably will occur. Essentially, the required critical density is that at which thermal neutral molecules entering the plasma have a high probability of being ionized and ejected through one of the magnetic mirrors along the magnetic field lines. Thus, through the process of burnout, the interior of the plasma would be protected from neutral molecules, and further increases in density would occur without an increase in the injected molecular ion current.

It was initially believed that at low plasma densities the principal loss mechanism for the trapped energetic ions would be electron capture collisions with residual gas molecules present in the plasma volume. However, the carbon arc itself was found to contribute materially to electron capture losses. Snell [4] and Dunlap [5] have described our earlier observations of the electron capture collisions of circulating protons* with the multiply-charged carbon ions in the arc. When operating with a 6.7 kG field, a proton orbit radius of 13.5 cm, and a pressure of 10^{-6} mm Hg in the plasma region, approximately one-third of the trapped ions were lost by electron capture collisions in the arc and two-thirds by similar collisions with the background gas. When foreign gases were introduced to raise the pressure, fewer ions underwent charge-exchange in the arc and more were lost in the background gas. Thus, at a pressure of about 10^{-5} mm Hg of hydrogen gas, 95 percent of the charge-exchange loss resulted from collisions with gas molecules.

A second problem became clear when, at the higher gas pressures, the proton containment times measured with arc-dissociation were compared with those measured with gas-dissocation (dissociation by collisions with gas molecules in the plasma volume). At pressures of 10^{-5} mm Hg, where proton losses in the arc were negligible compared to losses in a hydrogen gas

* At present hydrogen is injected rather than deuterium, so as to avoid neutron generation from the walls of the vacuum vessel.

background, the containment times with arc dissociation were only a fraction of those measured with gas dissociation. Since the electron capture cross-section of protons in hydrogen varies approximately as (proton energy)$^{-4}$ in a wide range around 300 keV [6], a possible explanation lay in the degradation of the proton energy by coulomb collisions with the relatively cool electrons in the carbon arc.

To investigate energy degradation, a spectrometer was constructed and used to measure energy spectra of the energetic neutral particles escaping the plasma. In this paper we describe the spectrometer and a number of experiments performed with it, and compare the results of these experiments with calculable predictions of the proton energy loss rate.

2. Energy loss considerations

SPITZER [7] has considered the energy loss of an energetic ion to a background of electrons with a Maxwellian velocity distribution. The rate of energy loss of a proton with energy W is:

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{4\pi n e^4 w (\ln \Lambda) G(X)}{T} \tag{1}$$

where $X=[m_e W/mT]^{1/2}$, n is the electron density, w the proton velocity, $\ln \Lambda$ the logarithm of the ratio of the maximum impact parameter to the minimum (tabulated in [7]), T the kinetic temperature of the electrons (eV), G a weighting function (tabulated in [7]), m_e the electron mass, and m the proton mass.

GILBERT [8] has integrated Eq. (1) by approximating the $G(X)$ function as

$$G(X)=\frac{(2/3\sqrt{\pi})X^2}{1+(4/3\sqrt{\pi})X^3} \tag{2}$$

to arrive at:

$$t=\frac{(m/m_e)T^{3/2}}{(2.91\times 10^{-6})\, n \ln \Lambda}\left\{\ln\frac{X_0}{X}+0.251\, X_0^3\left[1-\left(\frac{X}{X_0}\right)^3\right]\right\} \tag{3}$$

where X_0 is the initial value of X. This integrated form may be used to determine the time required for the energy to decrease from an initial value W_0 to some value W.

3. Description of DCX

Several modifications to the apparatus have been made since the last reports appeared [4, 5]. Fig. 1 is a schematic diagram of the longitudinal section of the present apparatus. The two innermost coils produce the magnetic mirror field used for particle confinement. The mirror ratio is 2:1 and the field strength on axis in the median plane is 10 kG. Two outer coils were added to increase the axial extent of the field to permit withdrawal of the arc electrodes farther from the median plane, thus decreasing contamination of the plasma volume.

A two-region vacuum geometry is employed. In the inner section, the plasma region, pumping is provided by the ionizing action of the carbon arc, which under normal operating conditions has pumping speeds of 4000 l/s for air and 7500 l/s for hydrogen. Surrounding the inner region is a water-cooled copper cylinder which can be baked at 400 °C by shutting off the flow of coolant and allowing the radiant energy (approximately 20 kW) of the carbon arc to heat the walls. With the arc in operation, pressures as low as 5×10^{-7} mm Hg have been obtained in the inner region. Continued outgassing of the wall surfaces with the arc in operation probably fixes this lower limit. In the outer regions the presence of the arc electrodes leads to operating pressures of about 10^{-5} mm Hg. Pumping in these regions is provided by two 80 cm diffusion pumps at each end of the apparatus.

Fig. 2 shows the ion orbits in the median plane. The beam enters the magnetic volume through an unshielded tube and intersects the arc approximately 180 degrees from the entrance. The beam trajectory then completes a 360 degree arc, crosses itself, and emerges through an aperture to the outer vacuum region. Dissociation in the arc of from 5 to 20 percent of the H_2^+ ions forms a ring of protons concentric with the axis.

The density of the trapped protons is best obtained from the relation

$$n_+ = \frac{I\beta\tau}{V} \tag{4}$$

where I is the injected H_2^+ current expressed as particles per second, β the fraction of the injected beam that is dissociated, τ the mean containment

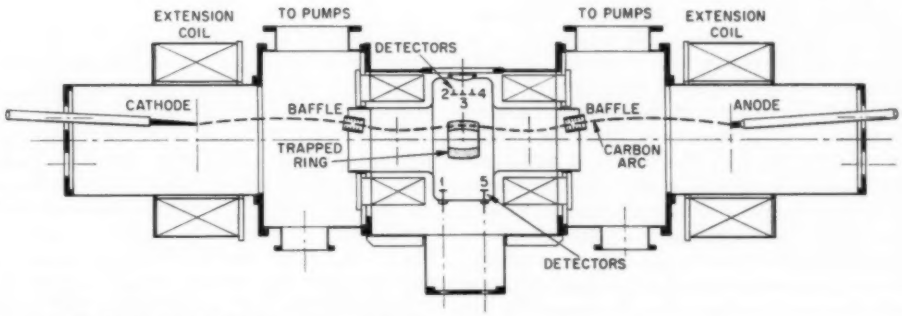


Fig. 1 A longitudinal section of the DCX apparatus.

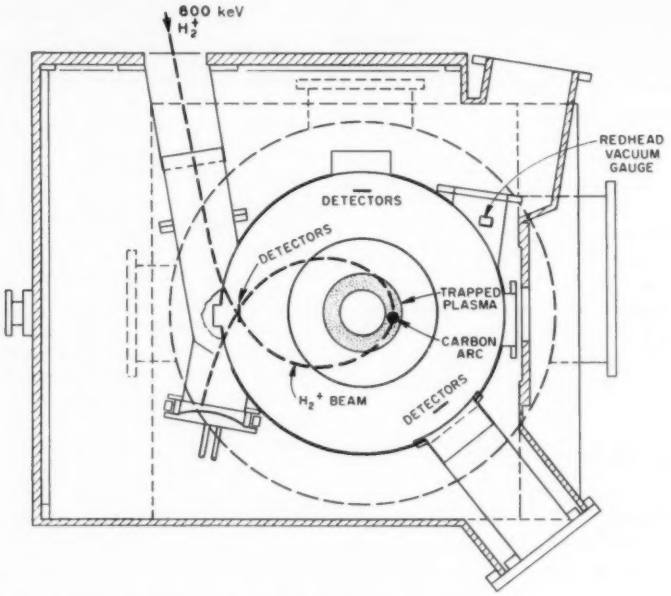


Fig. 2 A cross section of the median plane of the DCX apparatus.

time of the circulating protons, and V the plasma volume.

Maximum fast proton densities in the order of 10^9 to 10^{10} particles cm^{-3} have been achieved with injected H_2^+ currents of 3 mA.

The mean containment time of the plasma is determined from measurements of the escaping energetic hydrogen neutrals formed by charge-exchange collisions between the circulating protons and the background gas. These neutrals are allowed to impinge upon so-called "neutral particle detectors", each of which consists of a grounded Ni foil 2.5×10^{-5} cm thick, backed by an insulated Faraday cup. The foil thickness is sufficient to insure a statistical equilibrium of charge states between the ions and neutrals emerging from the back surface. For 300 keV incident neutrals, more than ninety-nine percent of the emerging particles are charged. The energy cut-off of the foils is 50 keV, and hydrogen particles with energies greater than 150 keV are transmitted unattenuated in number. The current from the Faraday cup is amplified by a transistor circuit whose output is then displayed on an oscilloscope. Deflector plates are arranged so that the injected H_2^+ current can be switched off in a few microseconds. The decay of the neutral particle current in the ensuing interval is then the decay of the fast proton plasma. The mean containment time of the plasma is defined as the time interval required for the neutral particle current to decay to 1/e of the steady state value.

A description of the carbon arc has been given by Luce [9]. The cathode consists of an annular tungsten cylinder with an outside diameter of 1.6 cm and an internal diameter of 1.25 cm. The anode is made of vacuum prebaked graphite. A low intensity discharge is first produced by introducing argon gas into the cathode region and applying a radio-frequency voltage between the electrodes. A dc voltage is then connected between the electrodes to produce the intense discharge. Operating conditions are usually 250 V and 300 A with an arc length of 3 m. Densities of 10^{14} particles cm^{-3}, as determined by microwave transmission, are usually associated with this type of arc. Spectrographic measurements and measurements of electromagnetic noise radiation indicate an average electron tempera-

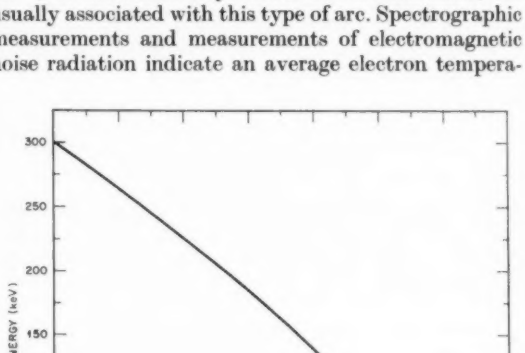


Fig. 3 The time variation of proton energy due to collisions with arc electrons as computed from Eq. (3) using the parameters of the experiment, which were an electron temperature of 5 eV, an arc density of 10^{14} electrons cm^{-3}, and an arc diameter of 2.54 cm.

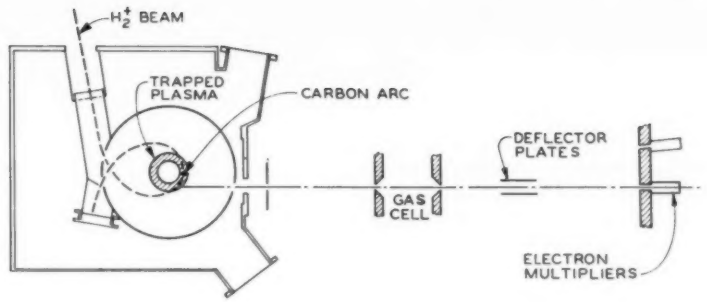


Fig. 4 A diagram of the neutral particle spectrometer.

ture of 5 eV. Using these parameters, Eq. (3) may be used to calculate the time dependence of the proton energy. The results obtained for an initial energy of 300 keV are shown in Fig. 3. For these conditions, the theory indicates an energy loss of 35 keV per millisecond of containment time.

4. Description of the energy spectrometer

To determine the gross energy losses of the protons, a neutral particle spectrometer was installed. A diagram of this device is shown in Fig. 4. Neutral particles from charge-exchange collisions with the residual gas passed out of the main vacuum tank through a 0.5 mm wide vertical slit. The beam thus formed then passed through a differentially pumped argon gas cell where some of the neutrals were stripped of electrons. Entrance and exit apertures of the gas cell were 0.5 mm slits, and the argon pressure was sufficiently low to reduce multiple collisions to negligibility. The resulting beam was passed through a set of deflection plates where an electrostatic field analyzed the energy of the protons. Two electron multipliers were used for detection of the particles. These consisted of commercial photo-multiplier tubes with the glass envelopes and photo-cathodes removed. An on-axis detector was used for alignment purposes and as a neutral particle monitor to insure that conditions remained uniform while the data were being taken. The off-axis electron multiplier was used to detect the deflected protons. A layer of soft iron 1.25 cm thick surrounded the region of the gas cell, analyzer, and detectors to provide magnetic shielding.

Geometric ray tracing indicated full acceptance angles of 2 minutes horizontally and 35 minutes vertically. The indicated spectrometer peak width at 300 keV was 5 keV (full width at half-maximum).

The electrostatic analyzer was calibrated by installing the spectrometer on a 625 keV accelerator facility where a source of monoenergetic protons was available. The voltmeter of the accelerator had been calibrated by measuring the resonance of the F^{19} (p, γ) reaction at 485 keV.

A sliding vacuum seal permitted movement of the spectrometer in the direction parallel to the magnetic field. Also, a bellows was provided so that it could be swung to intercept particles emerging at various angles.

In operation, the outputs of the detectors were amplified in electrometer circuits. The proton detector signal was then displayed on a chart recorder. Smooth control of the deflecting voltage was provided by a motor-driven variac. This voltage was read with a precision voltmeter and marks were added to the recorder trace at suitable voltage intervals. With this arrangement, repeated scans under the same experimental conditions yielded spectra reproducible to within a few percent.

Detector noise was not a problem in these measurements. Rapid fluctuations were smoothed out by the integrating action of the electrometer circuit, and the peaks of the measured distributions presented in this paper were two to three orders of magnitude above the detector noise level.

5. Corrections to experimental data

The spectrometer provided data in the form of plots of electron multiplier current expressed as a function of the energy of the escaping particles. Three corrections depending on the proton velocity v were considered to secure energy distributions of the escaping neutrals, namely corrections for:

1. the energy resolution of the electrostatic analyzer, which varies as v^2;
2. the energy dependence of the secondary electron emission ratio of the first dynode of the electron multiplier, which was assumed to vary as v^{-1}; and
3. the recharging cross-section of the argon gas cell, which varies as v^{-1} in the range of interest [6].

Since these corrections appear as multiplicative factors, the velocity dependence cancels, and curves of the current from the multiplier give the actual distributions of the neutral particles escaping the plasma in relative numbers per unit energy interval as a function of energy.

Consider now an energy distribution of escaping neutrals and the problem of determining the corresponding distribution of circulating protons. In the known distribution, the ratio of the ordinates at two energies is the ratio of the charge-exchange reaction

rates at these energies. From the equality of these ratios, the ratios of ion densities can be obtained as

$$\frac{(n_+)_1}{(n_+)_2} = \frac{(n_0)_1 (\sigma_{10} v)_2}{(n_0)_2 (\sigma_{10} v)_1} \tag{5}$$

where the subscripts 1 and 2 refer to specific energy intervals, the n_0 ratio is a ratio of ordinates in the escaping neutral particle energy distribution, the n_+ ratio is the corresponding ratio of ordinates in the proton energy distribution, and each $(\sigma_{10} v)$ term is the average product of the electron capture cross-section and proton velocity in that particular energy interval.

In this last equation, the cross-section ratio involves only the slope of the cross-section curve expressed as a function of energy. In the energy range of interest, electron capture cross-sections measured for protons in a number of gases have slopes that vary approximately as v^{-8} [6]. This indicates that the slope is relatively independent of the composition of the residual gas components in the vacuum, and in this work the transformations to energy distributions of circulating protons were made using the electron capture cross-sections of protons in nitrogen gas.

6. Results and discussion

Experiments were performed to investigate the sensitivity of the energy distributions to a number of parameters. The distributions were found to be strong functions of the longitudinal displacement of the spectrometer from the median plane and of the injected H_2^+ current. They were relatively insensitive to changes in the orientation of the spectrometer, made to sample neutrals escaping tangentially at radii other than the equilibrium radius (in large part due to the wide vertical acceptance angle of the spectrometer). Similarly, the distributions were insensitive to slight angular displacements of the spectrometer with respect to the median plane (the range ± 3 degrees was investigated). Displacing the spectrometer 3 degrees resulted in a reduction by a factor of two in the signal amplitude. Larger angular displacements were restricted by space requirements. In all the data presented here the axis of the spectrometer was maintained parallel to the median plane and the particles were sampled from a volume element centered at the equilibrium radius (8.2 cm). The data were taken at pressures near the base pressure (approximately 8×10^{-7} mm Hg in the inner vacuum region). A small leak of hydrogen gas into the inner region was adjusted to keep the pressure constant. The arcs were operated at 300 A.

A typical energy spectrum measured with the spectrometer mounted in the median plane of DCX is shown in Figure 5. The broken curve is the distribution of the escaping neutrals, and the solid line shows the derived distribution of the circulating protons. Apparently, a considerable number of the protons exist with energies greater than 300 keV, and the energy distribution also has a long low-energy tail. The shape of the curve suggests that three processes

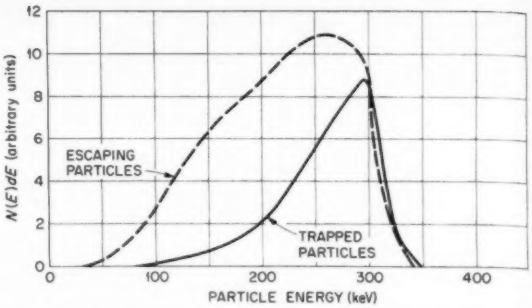


Fig. 5 Energy distributions of escaping neutrals and trapped protons. Measurements were made with the spectrometer mounted in the median plane. (300 A carbon arc breakup, 2.27 mA H_2^+, 8×10^{-7} mm Hg).

take place in the plasma: (1) a process which disperses the energy about 300 keV; (2) energy loss to the cold arc electrons, which tends to degrade the particle energy; and (3) the process of charge-exchange, which is very sensitive to energy and tends to deplete the ion population at low energies.

It does not appear that collisional diffusion can account for the presence of such large numbers of protons at energies significantly higher than 300 keV. Diffusion times calculated on the basis of coulomb collisions are orders of magnitude larger than the observed proton containment times. Among other possible dispersing mechanisms are electric fields in the arc or in the hot plasma.

Figure 6 shows another energy distribution taken with the spectrometer displaced 3.8 cm from the median plane along the magnetic axis. Note the extremely wide distribution of the escaping particles and the large proportion of particles present with energies in excess of 300 keV when the distribution is reflected back into the plasma. The number of neutrals escaping from this region of the plasma is considerably less than that from the midplane section shown in Figure 5.

The energy distributions were then measured as a function of the input H_2^+ current while the operating

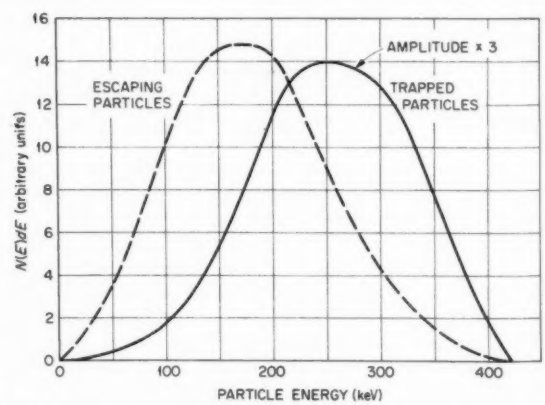


Fig. 6 Energy distributions of escaping neutrals and trapped protons. The spectrometer was displaced 3.8 cm from the median plane along the magnetic axis.

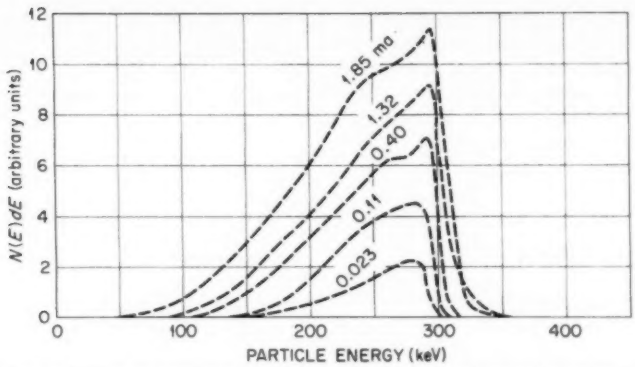


Fig. 7 Energy distributions of escaping neutrals. The injected H_2^+ current was the only parameter varied. The spectrometer was mounted in the median plane. (300 A carbon arc breakup, 1.5×10^{-6} mm Hg)

parameters of the carbon arc remained constant. The results, in the form of the energy distributions of the escaping neutrals, are shown in Figure 7. The various curves are for the indicated input H_2^+ currents. The relative amplitudes of the curves are in the same proportions as the currents measured from the electron multiplier. Neither these amplitudes nor the areas under the curves are in the same proportions as the injected H_2^+ currents. This indicates that either the reaction rate in the sampling volume was not linear with input current or that the angular distribution of the particles escaping from the volume became broader as the input current increased. The proton energy distributions derived from the curves of Figure 7 are shown in Figure 8. The shapes of the curves in Figures 7 and 8 are summarized in Table I.

TABLE I. The half widths and full widths of the energy distributions of Figs. 7 and 8.

H_2^+ Current (mA)	*Escaping Distributions*		*Internal Distributions*	
	Width Half Maximum (keV)	Full Width (keV)	Width Half Maximum (keV)	Full Width (keV)
1.85	115	310	60	245
1.32	98	265	52	225
0.40	94	215	51	170
0.11	83	175	50	150
0.023	60	155	44	125

Here the full width is taken as the difference of the particle energies at which the signal amplitude is two orders of magnitude less than the peak amplitude. As the current decreased, the width of the distributions decreased and for H_2^+ currents of 0.023 mA, almost no particles were found with energies above 300 keV. Apparently, the major dispersive process had disappeared. In further increasing the current to 3.5 mA, the curves become wider and energies in excess of 400 keV were measured.

A summary of the data is shown in Table II. The table may be examined in two parts: (1) for high (2.3 mA) injection currents, and (2) for low (0.1 mA) injection currents. The other variable is then the

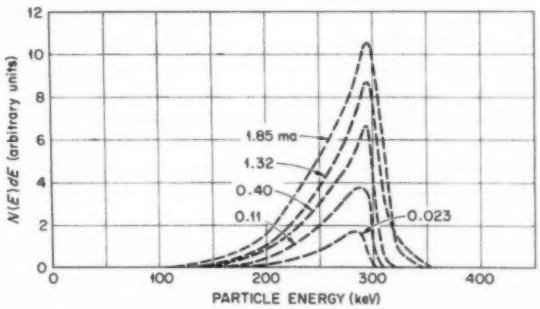


Fig. 8 Energy distributions of trapped protons. The injected H_2^+ current was the only parameter varied. The spectrometer was mounted in the median plane.

TABLE II. The average energies of the particle distributions as functions of input H_2^+ current and the longitudinal displacement of the spectrometer from the median plane. Carbon arc dissociation at 8×10^{-7}mm Hg.

Spectrometer displacement (cm)	*High current data*			*Low current data*		
	I (mA)	$\overline{E}$ escaping (keV)	$\overline{E}$ internal (keV)	I (mA)	$\overline{E}$ escaping (keV)	$\overline{E}$ internal (keV)
0	2.27	216	260	0.10	251	272
1.25	2.3	220	264	0.10	251	263
2.5	2.4	175	247	0.125	225	242
3.8	2.3	179	254	0.10	212	238
5.1	2.55	195	277	0.11	190	201

longitudinal position of the spectrometer with respect to the median plane. The average energy $\overline{E}$ is defined as the energy which, when multiplied by the total number of particles in the distribution, gives the total energy associated with the distribution. The average energy of the escaping particles is less with the large injection currents than with small currents; however,

the average internal distribution is nearly independent of the injected current. Not shown in the table is the fact that most of the particles were escaping between zero and 3.8 cm from the median plane. An energy balance between the particles lost and the particles injected, making use of the data presented in this table, is presented in the next Section.

7. Energy balance

Let us consider an energy balance equation of the form:

$$300\, I\beta = I\beta\,\tau\,(\mathrm{d}E/\mathrm{d}t) + I\beta f_1 \bar{E}_1 + I\beta f_2 \bar{E}_2 + \ldots \quad (6)$$

where $I\beta$ is the proton trapping rate with β the dissociation efficiency, τ is the mean containment time in milliseconds, $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t$ is the average rate of energy loss for a trapped proton in keV/ms, f_i is the fraction of particles lost due to some particular loss process, and $\bar{E}_i$ (keV) is the average energy of the particles lost by this process.

First let us estimate $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t$ for two different values of the H_2^+ injected current, basing the calculation on the data of Table II. Earlier experiments [4, 5], in which the area bounding the plasma volume was scanned with a neutral particle detector, showed that the principal loss mechanisms were charge-exchange with the carbon ions in the arc and with gas molecules in the plasma region. These experiments were performed with a magnetic field on the midplane axis of 6.7 kG and an ion orbit radius of 13.5 cm. Extrapolating these results to the present 10 kG geometry indicates that about two-thirds of the particles are lost in the arc and one-third in the gas at these pressures.

The energy balance equation then becomes:

$$300 = \tau \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{3}\left[(\bar{E}_{\mathrm{gas}})_{\mathrm{cx}} + 2\,(\bar{E}_{\mathrm{arc}})_{\mathrm{cx}}\right] \quad (7)$$

The $(\bar{E}_{\mathrm{gas}})_{\mathrm{cx}}$ term can be evaluated from Table II, because the particle spectrometer registered no particles that had been neutralized in the arc. $(\bar{E}_{\mathrm{gas}})_{\mathrm{cx}}$ is taken as the weighted average of the values of $\bar{E}_{\mathrm{escaping}}$.

There has been no measurement of $(\bar{E}_{\mathrm{arc}})_{\mathrm{cx}}$. However, reasonable limits can be placed on its value by assuming on the one hand that in this energy range the electron capture cross-section of the arc is independent of energy, or on the other hand that it varies as the electron capture cross-section of the residual gas in the vacuum tank. If the electron capture cross-section of the carbon ions is independent of the energy, then the $(\bar{E}_{\mathrm{arc}})_{\mathrm{cx}}$ is the same as the energy of the circulating protons, or $(\bar{E}_{\mathrm{arc}})_{\mathrm{cx}}$ equals $\bar{E}_{\mathrm{internal}}$. In the second case, $(\bar{E}_{\mathrm{arc}})_{\mathrm{cx}}$ is the same as $(\bar{E}_{\mathrm{gas}})_{\mathrm{cx}}$. Again, the weighted average of the values of $\bar{E}_{\mathrm{escaping}}$ is used to determine $(\bar{E}_{\mathrm{arc}})_{\mathrm{cx}}$.

The values used for $(\bar{E}_{\mathrm{gas}})_{\mathrm{cx}}$ and $(\bar{E}_{\mathrm{arc}})_{\mathrm{cx}}$, the measured mean containment times (each the average of numerous decay curves), and the $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t$ calculated from the energy balance equation are shown in Table III.

TABLE III. Summary of the parameters and results of the energy balance calculation for arc dissociation.

I (mA)	τ (ms)	$\bar{E}$ gas cx (keV)	$(\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}E)$ arc cx	$\bar{E}$ arc cx (keV)	$\mathrm{d}E/\mathrm{d}t$ (keV/ms)
0.1	2.6	242	$\sim E^0$	262	17
			$\sim \sigma_{10}$ gas	242	22
2.3	1.7	204	$\sim E^0$	258	35
			$\sim \sigma_{10}$ gas	204	56

The average values for $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t$ are about 20 keV/ms for 0.1 mA H_2^+, and 45 keV/ms for 2.3 mA H_2^+. There is considerable evidence that energy loss to the arc electrons constitutes the major energy sink at the lower injected current. This loss rate figure, approximately 20 keV/ms, is also in reasonable agreement with the value calculated from Figure 3.

The rate of energy loss to the arc would be expected to be nearly the same for both injected currents. The arc characteristics should not change with the change in input current since the arc density is a factor of 10^4 to 10^5 higher than the circulating proton density. The proton energy distributions are different for the two cases, but the predicted rate of energy loss to arc electrons is rather insensitive to proton energy in the range of interest.

There then immediately arises the question of the origin of the additional energy loss rate at increased injection currents. The initial assumption that the only particle loss mechanism was charge-exchange may be in error. The difference in the $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t$ values would of course be reduced by adding to the high current case a particle loss mechanism which favors the loss of particles with energies above the mean of the trapped proton distribution. This could in principle be in the form of energetic ion losses through the mirrors or to the walls, but previous measurements have indicated all ions are lost by charge-exchange. A portion or all of the apparent $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t$ increase may also be due to radio-frequency radiation, losses to a more dense cold plasma, plasma potential drain, or other phenomena.

8. Gas dissociation

Additional experiments were performed in which the use of the arc was discontinued and a plasma was formed by dissociating H_2^+ ions by collisions with residual gas molecules. Since the gas dissociation was much less efficient than arc dissociation, the fast ion density was reduced to about 10^7 ions/cm^3, which may be compared with densities of 10^9 to 10^{10} ions/cm^3 for arc dissociation. Again the longitudinal position of the spectrometer and the injected current were varied. Data were obtained at the median plane and the 1.25 cm locations, but there was insufficient signal

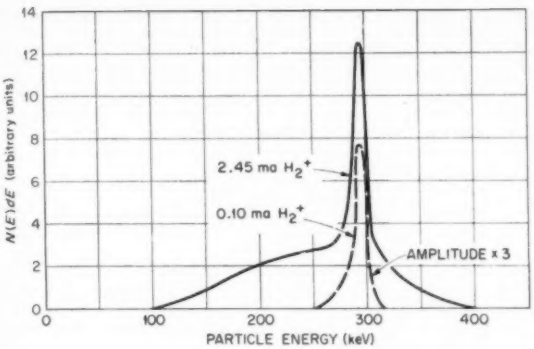


Fig. 9 Energy distributions of escaping neutrals. The spectrometer was mounted in the median plane. (Hydrogen gas breakup, 1.5×10^{-6} mm Hg)

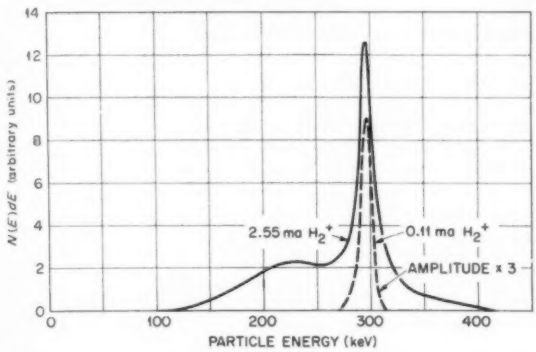


Fig. 10 Energy distributions of escaping neutrals. The spectrometer was displaced 1.25 cm from the median plane along the magnetic axis.

strength to secure data at positions farther from the median plane. Figures 9 and 10 are characteristic of the distributions obtained. For the larger injected current, particles with energies as high as 390 keV were present. When the current was increased to 3.5 mA, particles with energies as great as 450 keV were detected. With low currents, the energy distributions were very narrow. The average energies of the various distributions are summarized in Table IV.

TABLE IV. The average energies of the particle distributions as functions of input H_2^+ current and the longitudinal displacement of the spectrometer from the median plane. Hydrogen gas dissociation at 1.5×10^{-6} mm Hg.

Spectrometer Displacement (cm)	I (mA)	$\overline{E}$ Escaping (keV)	$\overline{E}$ Internal (keV)
0	2.45	261	292
0	0.10	291	294
1.25	2.55	270	296
1.25	0.11	294	299

Again the energy of the escaping particles is higher for lower H_2^+ currents. For each value of the injected current, the neutral particle detector decay traces indicated a mean containment time of approximately seven milliseconds. For currents of 0.1 mA, the signal-to-noise ratio of the neutral particle detector signal was about one. Thus, the measured containment times at low currents are uncertain within a factor of two.

If the assumption is again made that the only energetic particle loss mechanism is charge-exchange, the energy balance equation becomes

$$300 = \tau\,(\mathrm{d}E/\mathrm{d}t) + (\overline{E}_{\mathrm{gas}})_{\mathrm{cx}}\,. \qquad (8)$$

Table IV contains the data necessary to evaluate the $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t$ term. Averaging the $\overline{E}_{\mathrm{escaping}}$ data for the median plane and the 1.25 cm displacement yields $(\overline{E}_{\mathrm{gas}})_{\mathrm{cx}}$ values of 266 keV for 2.5 mA of H_2^+ and 292 keV for 0.1 mA of H_2^+. Then the $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t$ values are 5 keV/ms and 1 keV/ms, respectively. The value of 1 keV/ms is the same as that calculated for energy loss due to excitation and ionization [10] of the gas molecules present. As in the case of arc dissociation, the conclusion is made that the rate of energy loss of the circulating protons for gas dissociation is greater for higher injection currents. The scatter in measurements of the mean containment time at the smallest currents prevents any conclusion as to the relationship of storage time and injected current.

9. Conclusions

With arc dissociation, the circulating protons lose energy at a rate of about 20 keV/ms with 0.1 mA injected current, and at a rate twice as large when the current is increased to 2.3 mA. As a consequence of the energy loss, the charge-exchange cross-section is increased, and this evidently leads to a decrease of mean containment time. Most of the 20 keV/ms loss rate is believed due to coulomb collisions of the circulating protons with electrons in the dissociating arc. This loss rate is within a factor of two of that calculated on the basis of loss to electrons of a Maxwellian distribution, well within the accuracy of the arc parameters used in the calculation. Several mechanisms that might account for the additional energy loss rate at higher currents are suggested, but the specific origin of this loss is as yet unclear.

Measurements with gas dissociation also show an increase in the rate of energy loss with increasing injected current.

With either arc or gas dissociation, the response of the energy distributions to increases in injected H_2^+ current indicates the presence of a non-collisional dispersing mechanism, one which increases in importance with increases in injected current. The nature of this mechanism is not clear.

We are presently engaged in extending the measurements of the energy distributions to higher injected currents, in evaluations of the magnitudes of the various possible energy loss mechanisms, and in experiments to determine the nature of the non-collisional dispersing mechanism.

Acknowledgements

The authors wish to express their thanks for the assistance given by Dr. A. H. Snell, who directs controlled fusion work at O.R.N.L., and many other of their colleagues. In particular, they wish to acknowledge numerous helpful discussions with Drs. H. Postma, T. K. Fowler, and R. G. Alsmiller.

Oak Ridge National Laboratory is operated by Union Carbide Nuclear Corporation for the United States Atomic Energy Commission.

References

[1] BARNETT, C. F., *et al.*, Proceedings of Second U.N. International Conference on Peaceful Uses of Atomic Energy, Geneva, **31** (1958) 298.

[2] LONGMIRE, C., TUCK, J. L., THOMPSON, W. B., Plasma Physics and Thermonuclear Research (Pergamon Press, Inc., New York, 1959) Vol. I, Sec. 2, p. 196.

[3] SIMON, A., *Phys. Fluids* **1** (1958) 495; *Phys. Fluids* **2** (1959) 336.

[4] SNELL, A. H., Proceedings of the 4th International Conference on Ionization Phenomena in Gases (North-Holland Pub. Co., Amsterdam) **2** (1959) 997.

[5] DUNLAP, J. L., *I.R.E. Transactions on Nuclear Science* Vol. NS-7, No. 4 (1960).

[6] BARNETT, C. F., REYNOLDS, H. K., *Phys. Rev.* **109** (1958) 355.

[7] SPITZER, L., Physics of Fully Ionized Gases (Interscience Publishers, Inc., New York, 1956) pp. 68—81.

[8] GILBERT, F. C., United States Atomic Energy Commission Report UCRL-5697.

[9] LUCE, J. S., Proceedings of Second U.N. International Conference on Peaceful Uses of Atomic Energy, Geneva **31** (1958) 305.

[10] DALGARNO, A., GRIFFING, G. W., *Proc. Roy. Soc.* **A 232** (1955) 423.

(Manuscript received 26 June 1961)

THE STRUCTURE OF THE ASTRON E-LAYER

LEWI TONKS*

LAWRENCE RADIATION LABORATORY, UNIVERSITY OF CALIFORNIA

LIVERMORE, CALIFORNIA, U.S.A.

The structure of the field-reversing layer of circulating relativistic electrons which constitutes the plasma trap of the Astron has been calculated self-consistently using a model embodying the simplifying assumptions: (1) uniformity over an infinite length so that end-effects are absent, (2) uniformity of impressed field, i.e., no plasma diamagnetism, (3) dynamical friction from the trapped plasma but no scattering, (4) no radiative energy loss, (5) absence of instabilities, and (6) the structure can be initiated. Assumptions (1), (5), and (6) are the most questionable. In the model monoenergetic electrons appear uniformly on a cylindrical surface of radius r_2 with no radial velocity, all traveling at the same polar angle. The impressed magnetic field is defined by a, the radius of the helix executed in that field. The dynamical friction is defined by the constant $\nu = \beta\, \mathrm{d}\gamma/\mathrm{d}t$ where $\beta \equiv v/c \equiv (\gamma^2-1)^{1/2}/\gamma$ and ν is proportional to plasma density. The energy degradation is slow enough for the structure to be viewed as a steady-state ensemble with the number of electrons in any small energy-momentum interval inversely proportional to the rate of slowing down there.

The initial-energy range is defined by $10 < P_0 \equiv (\gamma^2-1)^{1/2} < 80$. A basic parameter is $G \equiv r_2/a$—the larger G, the tighter the electrons tend to spiral relative to the layer diameter. At any value of G greater than about 1.2, increasing the injection rate does indeed cause field reversal. An initial steep traversal through zero is followed by a region of slow increase—a quasi-plateau—as the electrons cease to penetrate to the axis and become confined to an ever-thinner layer lying inside r_2. This might well constitute the working region. The useful range of G appears to be from about 1.3 to 2.5 irrespective of P_0. (Beyond this the ratio of reversed to impressed field exceeds 0.75 and the mathematics produces physical unrealities.) For S, the "injection rate", the useful range is roughly 0.8 to 1.6 at the low G and 3.8 to 4.6 at the high. For $S = 2$ and a plasma density of electrons of 10^{15}, the electron injection rate is 0.32 mA/cm length of E-layer.

1. Introduction

The Astron thermonuclear machine has, as its basic plasma-confining element, a rotating cylinder of relativistic electrons which Christofilos calls "the E-layer". Their circulatory trajectories conform to the forces imposed by an externally impressed uniform magnetic field, by the self-field of the E-layer, and by the diamagnetism of the reacting thermonuclear plasma. The current in the layer is large enough to cause reversal of the external field at the axis of the configuration and throughout a considerable region interior to the layer.

The theoretical possibility of the existence of such a layer under the assumption of some drastic simplifications has been shown [1, 2]. This paper relaxes those assumptions to the extent of recognizing the dynamical friction between the layer electrons and the trapped plasma. There is the additional small generalization of allowing the electron velocity v to have components

$$v_z = v\sqrt{1-\lambda^2}, \quad v_\perp = v\lambda = \beta c \lambda \tag{1}$$

parallel and perpendicular to the magnetic field, where λ is the sine of the polar angle ψ of the velocity vector. But the E-layer is still treated as axially infinite, angular scattering by the plasma particles is neglected, the stability of the medium is not considered although gross configurational stability is, and it is assumed that fresh electrons can be properly and continuously injected. In the present model, they are monoenergetic and appear uniformly over the surface of a cylinder of radius r_2 with their velocity v tangent to the cylinder and making the angle ψ with the axis.

2. The slowing-down law

The prior treatments dealt with a conservative system, but now the slowing down of the electrons is to be considered. If the collisions between relativistic electrons with speed $v=\beta c$ and mass $m=\gamma m_0$, $(\beta^2-1=1/\gamma^2)$ and non-relativistic electrons are treated mathematically in the manner of SPITZER [3], one obtains the energy-loss law

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = -\frac{\nu\gamma}{\sqrt{\gamma^2-1}}, \tag{2}$$

where ν is a decay rate given by

$$\nu = c n \sigma_c \ln \Lambda_D \tag{3}$$

$$\Lambda_D = \frac{3}{2e^3}\left[\frac{k^3 T^3}{\pi n_e}\right]^{\frac{1}{2}} = 1.244 \times 10^4 \left[\frac{T^3}{n_e}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{4}$$

* Consultant to Lawrence Radiation Laboratory, from General Engineering Laboratory, General Electric Company, Schenectady, New York.

n_e is the electron concentration in the plasma in cm^{-3}, $\sigma_e = 9.8 \times 10^{-25}$ cm^2 is the classical area of the electron, and T is the temperature of the plasma in degrees Kelvin.

A more sophisticated calculation [4] for the case that the speed of the "test" particle is far greater than the speed of the plasma electrons gives inconsequentially different results.

The retarding force arising from radiation relative to that from dynamical friction is about $4 \times 10^{-7}\ \gamma^4/\nu$. For $\gamma = 12$, dynamical friction predominates only for $n_e > 10^{10}$, so that the radiation drag can be important. It has, however, been left out, for its inclusion in the mathematics, though straightforward, would add complications of at least two kinds. Its main effect would probably be to require an increase in the replenishment rate of electrons for roughly the same layer configuration.

3. The stationary distribution in the E-layer

There is a loss of energy, a canonical-angular-momentum (CAM) impulse, and an axial-momentum impulse per unit time associated with every instant of the electron's life. Since there are no stochastic processes in the model, all electrons undergo the same experience and the electron density in phase space will depend upon a single parameter which can conveniently be chosen to be the linear momentum

$$p \equiv mv = \beta\gamma m_0 c. \tag{5}$$

A steady-state distribution will be set up in which the change in trajectory from one cycle to the next is extremely small and is important only in its cumulative effect. Hence, the motion in any one cycle can be calculated as if the system were conservative. Three of the six constants of the cycle are: p; p_θ, the CAM; and p_z, the axial momentum. The other three might be particular values of the coordinates, r_0, θ_0, and z_0, which have been designated, once for all, for each trajectory. By expressing the distribution function f_c in phase space in terms of these constants, the equations of motion are automatically satisfied.

The symmetry of the model assures that f_c is independent of any z_0 and any θ_0, so that these quantities do not appear. Thus we can write, quite generally,

$$f_c(p, p_z, p_\theta, r_0)\, dr\, d\theta\, dz\, dp_r\, dp_{\theta M}\, dp_z \tag{6}$$

for the number of electrons in an element of phase space, $p_{\theta M}$ being the (mechanical) angular momentum, and p_r the radial momentum.

Now the two momenta, p_z and p_θ, are each functionally related to p:

$$p_z = p_z(p), \qquad p_\theta = p_\theta(p).$$

These relations will be derived. They can be immediately formally incorporated into (6) by using Dirac δ-functions;

$$\delta[p_z - p_z(p)]\, \delta[p_\theta - p_\theta(p)]\, f_c(p, p_z, p_\theta, r_0)\, dr\, d\theta\, dz\, dp_z\, dp_r\, dp_{\theta M}\, dp_z. \tag{7}$$

This 3-factor integrand is thus the basic distribution function for the present problem. Looking ahead, we see that integrations over p_z and p_θ (not $p_{\theta M}$) will then merely substitute $p_z(p)$ and $p_\theta(p)$ for these quantities in $f_c(p, p_z, p_\theta, r_0)$ and whatever multiplier may be associated with it, simply converting the former to

$$f_p(p, r_0) \equiv f_c[p, p_z(p), p_\theta(p), r_0]. \tag{8}$$

Since p_r and $p_{\theta M}$ are quite unsuitable as variables of integration, we shall transform $dp_r\, dp_{\theta M}$ to $dp dp_\theta$ by means of the Jacobian based on the relations

$$p_r^2 = p^2 - p_z^2 - \left[\frac{p_\theta - p_B(r)}{r}\right]^2 \tag{9}$$

and

$$p_{\theta M} = p_\theta - p_B(r). \tag{10}$$

Here

$$p_B(r) \equiv (e/c)\, r A_\theta(r), \tag{11}$$

where A_θ is the azimuthal component of the vector potential. We find

$$dp_r\, dp_{\theta M} = (\partial p_r/\partial p)\, dp\, dp_\theta = \frac{p\, dp\, dp_\theta}{[p^2 - p_z^2 - (p_\theta - p_B)^2/r^2]^{1/2}}. \tag{12}$$

Looking ahead once more, we shall see that r_0 is logically the epicenter of each trajectory where p_r, the denominator of the right member of Eq. (12), is zero. Functionally, it will enter as the lower limit of an integration. We can, therefore, drop its explicit expression in f_c. The element of distribution with which we now proceed is, therefore,

$$\delta[p_z - p_z(p)]\, \delta[p_\theta - p_\theta(p)]\, (\partial p_r/\partial p)\, f_c(p, p_z, p_\theta)\, dr\, d\theta\, dp_z\, dp_\theta\, dp\, dz, \tag{13}$$

where the partial derivative implies the use of Eq. (12).

The dynamical friction is opposite in direction to the instantaneous velocity so that p_z remains proportional to p (which is not true when radiation caused by the acceleration is taken into account) and, in fact,

$$p_z(p) = (1 - \lambda^2)^{1/2}\, p;$$

prompt advantage can be taken of this in simplifying $(\partial p_r/\partial p)$, as will appear in Eq. (14).

The number of electrons, $n_p(p)\, dp$, per unit of axial length whose momenta lie in the interval p, dp, can be expressed in two ways. The first is as the integral of (13) over p_z, p_θ, θ, and r. The δ-functions make the first two integrals possible, symmetry makes the third trivial, and only the last needs to be left in the form of an integral

$$n_p(p)\, dp\, dz = 4\pi p f_p \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{\{\lambda^2 p^2 - [p_\theta(p) - p_B(r)]^2/r^2\}^{1/2}}\, dp\, dz. \tag{14}$$

The numerical factor is 4π instead of 2π because, as explained in [2], at Eq. (10) the validity interval of the braces is theoretically to be traversed twice, but the understanding in evaluations will be that the

integral is to be taken between pericenter and apocenter, and hence it will be traversed only once.

The second way is in terms of the number N of fresh electrons injected per axial cm per sec and the rate, $\dot{p}(p)$, at which they slow down:

$$n_p(p)\,\mathrm{d}p = -[N/\dot{p}(p)]\,\mathrm{d}p.$$

Using this to eliminate n_p from Eq. (8), we shall have f_p expressed in terms of the physics variables:

$$f_p = \frac{N}{4\pi p[-\dot{p}(p)]\int\{\ \}^{-1/2}\mathrm{d}r}, \tag{15}$$

{the integral being that in Eq. (14)} once expressions for $\dot{p}(p)$ and $p_\theta(p)$ have been derived.

4. Change of variables

The point has been reached at which some changes of variable simplify the analysis. Defining

$$P \equiv (\gamma^2 - 1)^{1/2}, \tag{16}$$

we then have

$$p \equiv m_0 c P. \tag{17}$$

We also define

$$P_\theta \equiv p_\theta/m_0 c\lambda r_2, \quad P_B \equiv p_B/m_0 c\lambda r_2, \quad \varrho \equiv r/r_2. \tag{18}$$

Then using Eqs. (2) and (5)

$$-\dot{p} = m_0 c(1+P^2)/P^2,$$

and from Eq. (15)

$$f_p(p)\,\mathrm{d}p = \frac{N\lambda}{4\pi r_2 \nu}\frac{P\,\mathrm{d}P}{(1+P^2)\int\frac{\varrho\,\mathrm{d}\varrho}{[\varrho^2P^2-(P_\theta-P_B)^2]^{1/2}}}. \tag{19}$$

5. The canonical angular momentum (CAM)

We have still to derive $p_\theta(p)$ or, in the new variables, $P_\theta(P)$. In a truly conservative system of the present symmetry, p_θ is, as we have been recognizing, constant, so that in our slightly dissipative system

$$\frac{\mathrm{d}p_\theta}{\mathrm{d}t} = \lambda r\sin\varphi\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t},$$

$$\frac{\mathrm{d}P_\theta}{\mathrm{d}P} = \frac{r\sin\varphi}{r_2}.$$

Here φ is the angle the trajectory makes with the radius vector. Recognizing that the momentum loss per trajectory cycle is minute, we calculate the average value $\langle P_\theta'\rangle$ of $\mathrm{d}P_\theta/\mathrm{d}P$ over a cycle at any stage of the electron's life:

$$\langle P_\theta'\rangle = \frac{\int(r/\dot{r})\sin\varphi\,\mathrm{d}r}{r_2\int(1/\dot{r})\,\mathrm{d}r}$$

$$r\sin\varphi = r_2[P_\theta - P_B(\varrho)]/P$$

$$\dot{r} = \frac{1}{m}\left[\lambda^2p^2 - \frac{(p_\theta-p_B)^2}{r^2}\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{\lambda c}{\gamma\varrho}[\varrho^2P^2-(P_\theta-P_B)^2]^{\frac{1}{2}}. \tag{20}$$

The algebra is straightforward. Dropping the averaging notation and using

$$R \equiv \{\varrho^2P^2 - [p_\theta(P) - P_B(\varrho)]^2\}^{-\frac{1}{2}} \tag{21}$$

$$Q \equiv R[P_\theta(P) - P_B(\varrho)], \tag{22}$$

$$\frac{\mathrm{d}P_\theta}{\mathrm{d}P} = \frac{\int\varrho Q(\varrho,P)\,\mathrm{d}\varrho}{P\int\varrho R(\varrho,P)\,\mathrm{d}\varrho}. \tag{23}$$

The primitive, $P_\theta(P)$, of this integro-differential equation, inserted in Eq. (19) establishes f_p in terms of P_B.

6. The magnetic field

All that is still needed for the complete mathematical formulation is the additional relation which will develop from Maxwell's Equation:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(rA_\theta(r))\right] = -\frac{4\pi j}{c}. \tag{24}$$

For the calculation of j, the differential volume element $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$ must be factored out of expression (13) which, in effect, divides the integrand portion by r. This quotient multiplied by

$$ev\lambda\sin\varphi = \frac{ec\lambda(P_\theta-P_B)}{\varrho(1+P^2)^{1/2}}$$

then gives the current density

$$j = \int\!\!\int\!\!\int\delta[p_z - p_z(p)]\,\delta[p_\theta - p_\theta(p)] \times\frac{ec\lambda}{r\varrho}\frac{[P_\theta-P_B(\varrho)]}{(1+P^2)^{1/2}}\frac{\partial p_r}{\partial p}f_c\,\mathrm{d}p_z\,\mathrm{d}p_\theta\,\mathrm{d}p.$$

The integrations over p_z and p_θ can be carried out just as they were to obtain Eq. (14) and they result, as there, in the supplanting of f_c by f_p [expression (8)]. Thus, using Eqs. (11), (19), (21), and (22),

$$j = \frac{ec\lambda N}{2\pi\nu r_2^2\varrho}\int\frac{P^2Q(\varrho,P)}{(1+P^2)^{3/2}\int\varrho R(\varrho,P)\,\mathrm{d}\varrho}\,\mathrm{d}P. \tag{25}$$

Here, again, a factor 2 has been introduced for the same reasons in integrating over P as applied in Eq. (14) in integrating over ϱ. The range of integration is limited below by the zero of the denominator of Q and above by another such zero, or by P_0, corresponding to the initial linear momentum, whichever is more restrictive.

Substitution in Eq. (24) gives

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varrho}\left[\frac{1}{\varrho}\frac{\mathrm{d}P_B(\varrho)}{\mathrm{d}\varrho}\right] = \frac{2r_cN}{\nu}\frac{I(\varrho)}{\varrho}, \tag{26}$$

where r_c is the classical electron radius, 2.80×10^{-13} cm, and

$$I(\varrho) = -\int\frac{P^2Q(\varrho,P)\,\mathrm{d}P}{(1+P^2)^{3/2}\int\varrho R(\varrho,P)\,\mathrm{d}\varrho}. \tag{27}$$

$I(\varrho)$ is always positive near $\varrho=1$ and is rarely, if ever, negative in field-reversal cases. For the magnetic field, we have from Eqs. (18) and (11)

$$B = \frac{1}{\varrho}\frac{\mathrm{d}p_B}{\mathrm{d}\varrho}\frac{m_0c^2\lambda}{er_2}. \tag{28}$$

We shall define

$$S \equiv 2\, r_c\, N/v. \tag{29}$$

This is proportional to the number of electrons injected per unit axial distance per unit time, and it is, therefore, a measure of the strength of the layer.

In performing the integrations to derive P_B from Eq. (26), it is appropriate to use the fixed upper limit, $\varrho = 1$, since the boundary conditions lie at the outside of the layer. Thus,

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\mathrm{d}P_B(\varrho)}{\mathrm{d}\varrho} = -S\int_{\varrho}^{1}\frac{I(\varrho_1)}{\varrho_1}\,\mathrm{d}\varrho_1 + \left.\frac{\mathrm{d}P_B}{\varrho\,\mathrm{d}\varrho}\right]_{\varrho=1}. \tag{30}$$

By using Eqs. (18) and (12), it is simple to show that

$$\left.\frac{1}{\varrho}\frac{\mathrm{d}P_B}{\mathrm{d}\varrho}\right]_{\varrho=1} = \frac{r_2}{a_2}P_0 = P_0\, G, \tag{31}$$

where P_0 is the initial linear momentum, a_2 is the curvature of the r, θ projection of the initial trajectory in the vacuum field and

$$G \equiv r_2/a_2. \tag{32}$$

Finally,

$$P_B(\varrho) = S\int_{\varrho}^{1}\varrho_1\int_{\varrho}^{1}\frac{I(\varrho_2)}{\varrho_2}\,\mathrm{d}\varrho_2\,\mathrm{d}\varrho_1 - \frac{GP_\theta}{2}(1-\varrho^2), \tag{33}$$

which establishes

$$P_B(1) \equiv 0, \tag{34}$$

which we are free to do.

7. Summary of the problem

We see that, of the physics parameters in the problem, λ does not enter into the equation-solving and only occurs in the physics evaluation of P_θ and P_B [Eq. (18)]. The quantities N and v combine in S, which is then one parameter. A second is P_0, which is involved directly in Eqs. (23) and (25) as a limiting value of P. Finally, there is G, which appears in Eq. (33).

In the jargon of modern physics, this is an eigenvalue problem in which the eigenfunction P_B belonging to the eigenvalue S is to be found for pairs of values of the parameters P_0 and G. P_θ depends on P_B through the integral, Eq. (23), and then P_B must satisfy Eq. (33), the double integral being an operator on P_B both explicitly through its involvement in $Q(\varrho, P)$ and $R(\varrho, P)$ and implicitly through P_θ.

8. Trajectories

Combining

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta - p_B}{mr^2} = \frac{e\lambda}{r_2\gamma\varrho^2}(P_\theta - P_B)$$

with $\dot{r}$ from Eq. (20) leads directly to

$$\theta(\varrho, P) = \int_{\varrho(\min)}^{\varrho}\frac{Q(\varrho, P)}{\varrho}\,\mathrm{d}\varrho \tag{35}$$

for the trajectory, and

$$\Delta\theta(P) = \int_{\varrho(\min)}^{\varrho(\max)}\frac{Q}{\varrho}\,\mathrm{d}\varrho$$

for the angular progress per radial semi-excursion. The elapsed time is

$$\Delta t = \frac{r_2}{\lambda c}(P^2+1)^{1/2}\int_{\varrho(\min)}^{\varrho(\max)}\varrho R(\varrho, P)\,\mathrm{d}\varrho, \tag{36}$$

whence the average angular velocity follows directly as

$$\langle\omega\rangle_{\mathrm{av.}} = \Delta\theta/\Delta t. \tag{37}$$

9. Calculations

The calculations were done on an IBM 704. Dr. T. Seidman supervised the machine formulation. Two solution schemes were used. In Method A, numerical values were chosen for P_0, G, and S, and $P_B(\varrho)$ was found by iteration in which each step was a cycle of operations. Initially, for Cycle 0, the magnetic field used was the uniform vacuum field. This determined directly the first-step function, $P_B{}^0(\varrho)$. Then $Q(\varrho, P)$, $R(\varrho, P)$, $P_\theta(P)$, and finally a new $P_B(\varrho)$, $P_B{}^1(\varrho)$, was calculated with it. In Cycle 1, $P_B{}^1(\varrho)$ was used for the same sequence of calculations, and so on. Method A had the disadvantage that convergence was so slow as to be misleading in some cases, but it had the advantage that it simulated, in some measure, the physics of the layer build-up. The generally used method was Method C, in which values of P_0, G, and the magnetic field strength at a particular value of ϱ were chosen, and both S and $P_B(\varrho)$ were found. Either the magnetic field at $\varrho = 1/2$ or the value of ϱ at $B_2/2$ were used. The former was appropriate for E-layers too weak for field reversal, the latter for reversal cases. $P_B{}^0(\varrho)$ defined a linearly varying field passing through the fixed point, and S^0 was chosen in Eq. (30) so that the new field, which was calculated in Cycle 0 and was defined by $P_B{}^1(\varrho)$, did also. Each succeeding cycle furnished a new S and a new $P_B(\varrho)$. Convergence was more rapid than by Method A, but the physically unrealistic rigidity imposed on B sometimes led to physically unrealistic solutions. These took the form of both a reversed-field and a non-reversed-field solution for the same value of S. Such double-value results appeared at the larger values of G, as they had in the earlier analyses [1, 2]. The reversed-field solutions were shown to represent unstable configurations by a modification of Method A in which $P_B{}^0(\varrho)$ approximated the converged $P_B(\varrho)$ found by Method C. The successive iterations diverged further and further from $P_B{}^0(\varrho)$, and approached the $P_B(\varrho)$ for the unreversed-field configuration.

9. The E-layer structure

The three-dimensional array of cases characterized by P_0, G, and S was explored over the range $P = 10$, 30, 80; with G ranging from 1.3 to 4.0; and S extending from non-reversal through most of the reversal range.

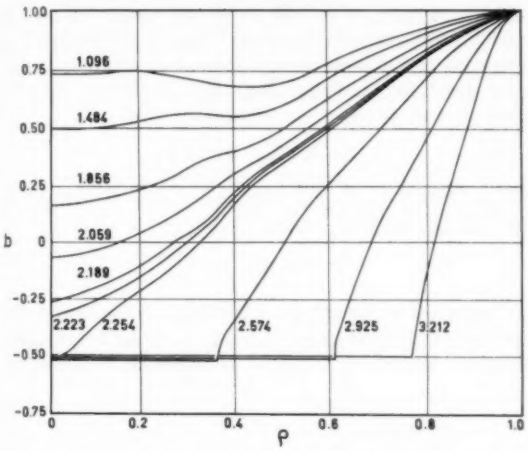


Fig 1 Typical distribution of relative magnetic field b, as a function of relative radius ϱ for electrons of $P_0 = 30$ (approximately 15 mev) in a magnetic field to make $G = 2.0$ [Eq. (32)] for a range of layer strengths S [Eq.(29)].

Figure 1 is typical of the magnetic field variation with radius from axis ($\varrho = 0$) to injection radius ($\varrho = 1$). The ordinate is field strength relative to impressed field, that is, $b = B/B_2$. Each curve is labeled with the corresponding value of S. The particular case is that for $P_0 = 30$, $G = 2.0$. With increasing layer strength, the field at the axis becomes weaker, traverses zero, and then decreases further to an almost constant reversed value as the E-layer becomes thinner and thinner. This behavior is summarized in Fig. 2.

There are qualitative differences between cases. At values of G greater than 2, the electrons do not reach into the axis for the smallest values of S. The field at the axis actually increases at first as, with increasing S, electrons penetrate closer to the axis. This kind of behavior has been seen in Fig. 9 of [2]. If G is not too large, the field at the axis begins to decrease as electrons reach and pass the axis and the transition to reversal proceeds.

At the transition to the plateau of the reversed field, convergence difficulties have sometimes been present and a sharp peak of reversed field has been found at the edge of the plateau. This may indicate a locality of reduced stability.

For values of G considerably greater than 2, the reversed-field configurations exhibit the behavior already mentioned in the section on calculations, and somewhat exemplified by the $G = 8$ curve of Fig. 7 of [2]. In particular, this happened with $P_0 = 10$, $G = 4$, and $S = 9.3$ to 11.5.

The broken-line extrapolation in Fig. 2 indicates that, at $S = 3.67$, the layer shrinks to a surface. Certainly one may think of increasing the injection rate beyond $S = 3.67$. In doing this, we would be injecting on the first pericenter of the electron trajectory instead of on the first apocenter (see Fig. 5), a circumstance which is not in accordance with the formulation of the problem. The solutions which have been obtained can,

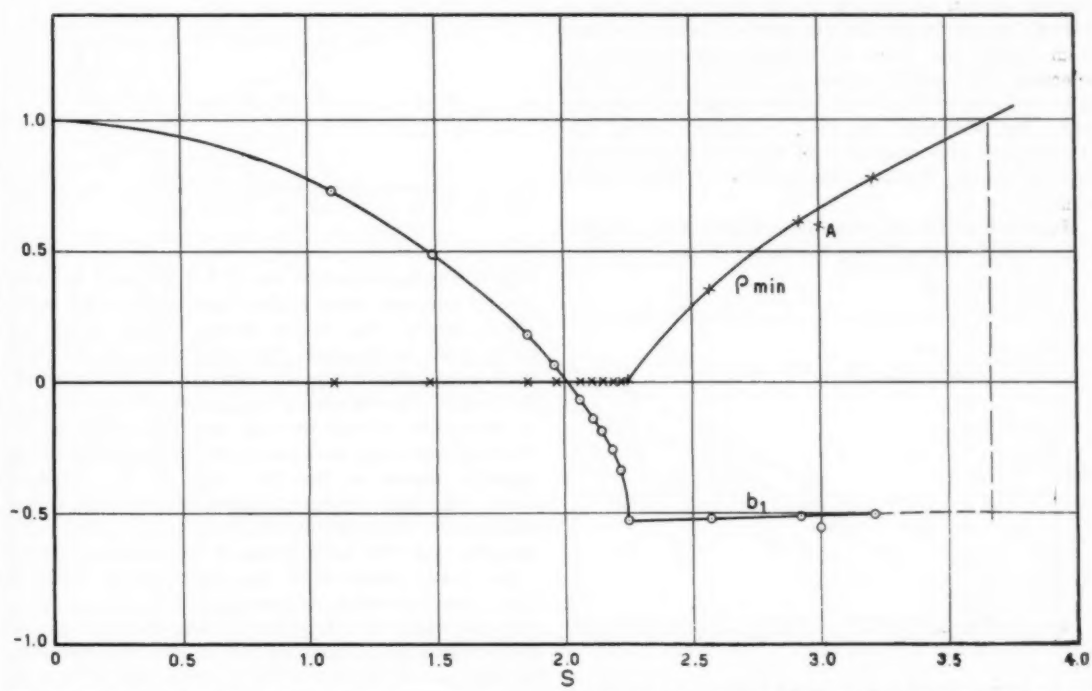


Fig. 2 Relative field at axis b_1 and relative extent ϱ_{min}, of internal region devoid of E-electrons for $P_0 = 30$, $G = 2.0$, as functions of S.

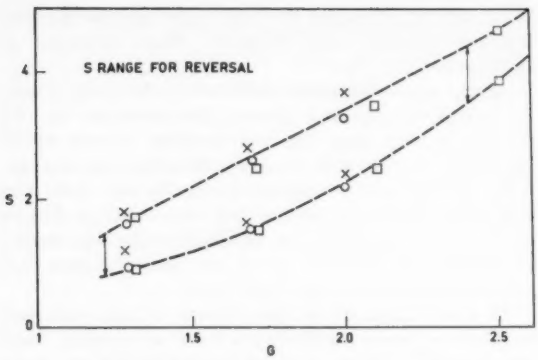


Fig. 3 Range of layer strengths S as functions of G [Eq. (32)] in well-developed E-layer for $P_0 = 10$ (crosses); $P_0 = 30$ (circles); and $P_0 = 80$ (squares). Some plotted points are slightly displaced horizontally from the G values 1.3, 1.7, and 2.0 for clarity.

however, be made to apply. Then, as S increases, $\varrho_{\min}$ will again decrease from near unity, but the ϱ of the outside of the layer will lie further and further above unity.

It has been possible to make a meaningful summary of all the results of all the field distributions. In Fig. 3, the range of S over which the b_1 plateau extends, as in Fig. 2, has been plotted against the corresponding values of G. It is seen that there is little difference between the three energies involved. Similarly, in Fig. 4, the maximum and minimum values of b_1 are plotted against G, and, as for S, the range of b_1 is seen to be practically independent of energy, at least from 15 MeV up. There is, of course some latitude in selecting the S and b_1 values, but not enough to affect the conclusions. This result is not surprising, because when the electrons are that relativistic, they are traveling close to the speed of light for most of their sojourn in the E-layer, irrespective of their initial energy.

Figures 3 and 4 tell immediately that, for a magnitude of field reversal lying between 0.2 and 0.5 of the impressed field, G should lie in the range 1.5 to 1.9, and S will have to be between 1 and 3. This enables us to estimate the high-energy current required to maintain an E-layer. From Eq. (29), it follows directly that J, the amperes/cm needed, is given by

$$J = 2.86 \times 10^{-7} \nu S.$$

If we take $S = 2$, $n_e = 10^{14}$, and $T = 10^8$, Eqs. (3) and (4) give $\nu = 62$, and

$$J = 3.5 \times 10^{-5}.$$

Figure 5 is a plot of trajectory stages lying at uniform intervals in P for the case $P_0 = 30$, $G = 2$, and $S = 2.574$, the case for which the field distribution is shown in Fig. 1. The epicenter of the $P = 6$ stage of the trajectory lies very close to the inner edge of the layer, which shows that lower energy stages come but little closer to the axis. The steepening of the orbit with decreasing energy is inherent in all reversed-field cases. This tendency progresses through a stage of retrograde motion at each zero-field point in the orbit and develops into paired eddies revolving in the opposite senses on the two sides of the zero-field circle. (As this low-energy phenomenon is a minor effect in the whole problem and adds very considerable complexity to the calculations, it has been neglected.)

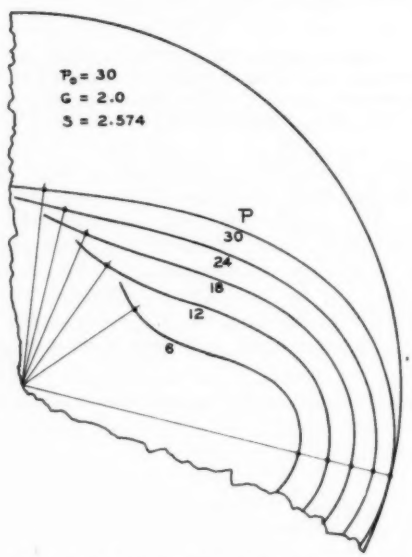


Fig. 5 Stages in electron trajectory for $P_0 = 30$, $G = 2.0$, and $S = 2.574$ at $P = 30$, 24, 18, 12, and 6.

For lower values of S, namely, 2.059 to 2.223 in Fig. 1, cases in which the trajectories fill in to the axis, the epicenters of a trajectory cross the axis as the energy decreases so that, at low energy, the trajectory revolves about the axis in the opposite sense from what it does at high energy. This kind of behavior is illustrated by the trajectory labeled "0" in Fig. 12 of [2].

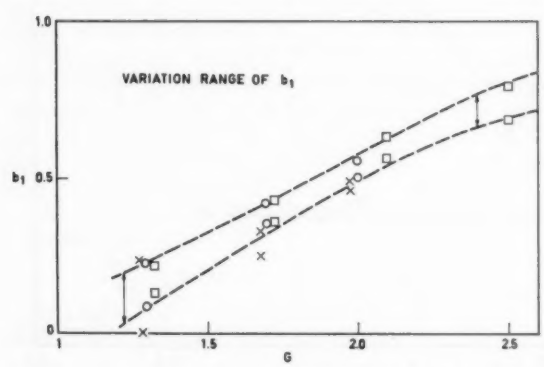


Fig. 4 Range of internal reversed fields b_1 as functions of G in well-developed E-layer for $P_0 = 10$, 30 and 80. The conventions are the same as for Fig. 3.

Acknowledgments

The help rendered by Dr. Thomas Seidman [5] in committing this problem to the IBM 704 was invaluable, as was the diligence of Sam Mendicino in following through with the calculations. The thanks of the author go to both.

This work was performed under the auspices of the United States Atomic Energy Commission.

References

[1] TONKS, L., *Phys. Rev.* **114** (1959) 637.
[2] TONKS, L., *Phys. Rev.* **118** (1960) 390.
[3] SPITZER, L., Physics of Fully Ionized Gases (Interscience Publishers, Inc., New York, 1956) Section 5.2.
[4] NEUFELD, J., RITCHIE, R. H., *Phys. Rev.* **98** (1955) 1632, Eq. (87).
[5] SEIDMAN, T., United States Atomic Energy Commission Report UCRL-5789-T (Nov. 1959).

(Manuscript received 17 July 1961.)

NUCLEAR FUSION 1 (1961)

PLASMA PRODUCTION BY THE TRAPPING OF ENERGETIC ATOMS

C. C. Damm, A. H. Futch, F. Gordon, A. L. Hunt, E. C. Popp, R. F. Post
and J. F. Steinhaus

Lawrence Radiation Laboratory, University of California
Livermore, California, U.S.A.

The production of a hot plasma by the injection of streams of energetic atoms into a confining magnetic field is discussed. The experiments described are directed towards injection of 20-keV hydrogen or deuterium atoms into a magnetic mirror field. The results of some numerical calculations of the plasma growth to a steady-state in a constant magnetic field are presented, including the calculation of the spatial distribution of the trapped ions. In these calculations, the primary trapping mechanism is the ionization of beam atoms by trapped ions and electrons. Parametric values are assigned to approximate the experimentally attainable conditions. The indicated equilibrium densities are in the range of 10^{14}/cm^3, at $\beta \approx 1\%$, with typical growth times of a few seconds, if the final density is determined by ion-ion scattering into the mirror loss cone.

The practical achievement of a hot plasma by this injection method depends upon maximizing the trapping rate, and minimizing the particle loss due to charge-exchange scattering. Severe requirements are therefore placed on the atomic beam intensity and the gas density in the confinement region. Some of the requirements on the build-up conditions imposed by plasma stability considerations are also discussed.

Progress toward meeting the technological requirements is described. A highly collimated beam of hydrogen atoms in excess of 5×10^{17} atoms/sec at 20-keV energy has been produced. The cross-sectional area of the beam is 20 cm^2 at a distance of 360 cm from the source; the half-angle divergence is less than 10 milliradians. Vacuum techniques have been developed to achieve base pressures in the 10^{-10} mm Hg range without extensive bakeout procedure. At the same time pumping speeds exceeding 10^5 l/sec for hydrogen are available.

A method of trapping the energetic atoms by means of a transient "cold" plasma is also discussed. This procedure greatly increases the initial plasma growth rate. The plasma density attainable depends upon the beam intensity, vacuum, and cold plasma density, the latter two being time-dependent. The generation of a suitable cold plasma is described.

1. Introduction

The trapping of energetic atoms by ionization in an initially evacuated volume of magnetic field is, in principle, a method of forming a hot plasma in any of the magnetic containment geometries. This injection process has been discussed previously [1], and this paper reports the status of an experimental effort directed towards the injection of energetic atoms into a magnetic mirror machine.

The unique degree of parametric independence enjoyed in this type of experiment allows control of the ion energy and momentum distribution functions during the period of plasma density growth. Such control may be essential to achieving plasma stability in the density regime below the limit set by diffusion into the mirror escape cone.

A necessary condition for plasma density growth to the high levels of interest for controlled thermonuclear fusion is an ion trapping rate in excess of the loss rate by charge-exchange scattering. Guided primarily by this requirement, but mindful also of the stability problem, a study of the parametric relations for plasma production by energetic atom trapping has been made [1, 2], with consideration limited to magnetic mirror fields. The results of this study, in conjunction with an evaluation of technological capability, form the basis for the present experiment.

2. Experimental description and requirements

The selection of a set of experimental parameters is discussed by Post [1] and the nominal values are listed in Table I. These are the design values for the Lawrence Radiation Laboratory ALICE experiment.

TABLE I. Parameters for the ALICE experiment.

Atom injected	Hydrogen or deuterium
Energy per atom	20 keV
Mirror ratio	1.55:1
Magnetic field at the mid-plane (injection plane)	50 kG
Orbit diameter (deuteron)	1.1 cm
Diameter of vacuum vessel	30 cm
Mirror-to-mirror distance	72 cm

The magnetic field is constant during the period of atom injection and plasma containment, thus per-

mitting the plasma to approach an equilibrium state. The magnetic field intensity is achieved with a modest expenditure of power (4 megawatts) by the expedient of cooling the copper conductor of the coils with liquid nitrogen.

The particle energy and magnetic field result in a value of the adiabatic parameter (ratio of orbit circumference to mirror spacing) of 0.05. From the theoretical work of GARREN, *et al.* [3], these orbits are predicted to be highly adiabatic, and no losses are expected because of nonadiabaticity. Control of the adiabatic parameter is considered to be one of the most important features of atomic injection.

The critical condition for plasma build-up is defined as the point at which the trapping rate by collision with hot trapped plasma equals the loss rate by charge-exchange scattering. For this definition, the density of cold plasma is assumed to be negligible. Using the approximate differential equation for the rate of density change, the critical condition for the present experiment is exceeded if the ratio of the beam atom density to the residual gas (hydrogen) density exceeds 2.0. While any combination of beam and vacuum could meet this condition, an excessively small beam moves the vacuum requirements outside of the realm of present technology. In addition, the lengthening of the injection period makes the generation of the magnetic field more difficult. As a practical matter, the minimum beam intensity must be of the order of 3×10^{16} atoms/cm^2 sec, so that a vacuum of 3×10^{-9} mm Hg is necessary. The total injection period is then a few seconds to approach a density limit determined by multiple scattering of the ions into the mirror escape cone.

3. Numerical calculations of plasma growth

Trapped particles with finite orbit diameters will precess about the axis of symmetry of the magnetic field. Since the beam dimensions are also finite, one expects a plasma density which is a function of radius as well as of time. The growth rate is in general coupled to the spatial distribution, so that the approximate differential equation used earlier must be refined. FUTCH, *et al.* [4] have considered these effects, and have recently improved their formulation to eliminate the invalid assumption of isotropic velocity distribution of the ions. While the full range of numerical investigation has not been completed, some preliminary results can be presented. The solutions for plasma density versus time do exhibit exponential growth, with parametric values set at approximately the levels mentioned in the previous section. The effect on plasma growth rates of charge-exchange of the trapped ions with beam atoms is essentially negligible. This contrasts with the enhancement of growth found earlier when the isotropic velocity assumption was included. The contribution of electrons to the trapping has now been included, with a significant improvement of the growth rate. Gas density variation during build-up has also been investigated [5] and, under the present

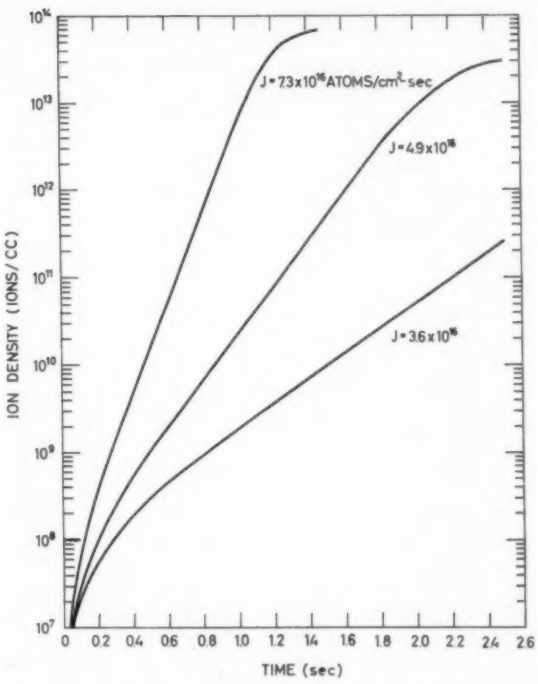


Fig. 1 Results of numerical calculations of build-up for 20-keV deuterium atoms at three levels of beam intensity. Residual gas pressure is assumed to be 1.5×10^{-9} mm Hg.

set of conditions, the effects of "gas burn-out" and plasma pumping are small, even at high densities.

A typical numerical result obtained using the basic parameters of Table I and assuming a gas (hydrogen) density of 5×10^7 molecules/cm^3 is shown in Fig. 1. (This density corresponds to a pressure of 1.5×10^{-9} mm Hg.)

While the numerical calculations indicate slightly more stringent requirements for build-up than the approximate equation, the difference is not serious. Of course, the numerical calculations are still approximate in that the axial distribution of the plasma is not included (the formulation is two-dimensional), and the exact neutral gas density distribution is not specified. Except when close to the critical point, these effects are expected to be small.

4. Stability considerations

In carrying out the numerical build-up calculations, it is, of course, tacitly assumed that co-operative effects are unimportant. This crucial assumption is yet to be verified. We have, however, considered some aspects of the question of plasma instabilities in the ALICE experiment and have arrived at the conclusions discussed in the following paragraphs.

If we assume that the hydromagnetic "flute instability" either will be stabilized by the same mechanisms now apparently operative in our other mirror machine

experiment [6, 7] or is stabilizable by theoretically predicted means, our concern is mainly with "micro-instabilities" of velocity-space origin, i.e., localized instabilities which feed from anisotropies in the distribution functions in velocity space of the trapped particles. One ready source of such anisotropies is the neutral injection process itself which may create trapped ions with a highly ordered pitch-angle distribution. We are presently aware of three different types of such instabilities which might conceivably occur in the ALICE experiment. All of these are potentially inherent in the method of injection. The instabilities are:*

1. *The "mirror" instability*, a hydromagnetic velocity-space instability predicted to arise whenever the value of $\beta=[p_\perp/(B_0^2/8\pi)]$ exceeds a critical value which is approximately equal to $t=T_\parallel/T_\perp \sim p_\parallel/p_\perp$. $T_\parallel$ and $T_\perp$ are the "temperatures" of the ion random motions parallel and perpendicular to the magnetic lines, respectively. This instability, which was first discussed by ROSENBLUTH [8], has possibly been observed (in a "hot electron" plasma) by PERKINS and POST [9]. If we assume that this instability will also arise, as predicted by theory, when the ions of the plasma carry the energy and the anisotropy, we may calculate the conditions under which it might occur in ALICE. This has been done by POST [1]. The result is that, if the randomizing effect of ion-ion collisions is taken into account, then it is found that as long as the ion energy (during build-up) is kept below a critical value, the anisotropy will never be large enough to stimulate the mirror instability, no matter how highly directed the injected beam. For the ALICE experiment, this critical energy is roughly 180 keV, well above the design starting-energy range of 20 keV.

2. *The "electrostatic plasma resonance" or "Harris" instability.* The instability, which can loosely be described as a resonance between electrostatic plasma oscillations and ion cyclotron motion, was first discovered by HARRIS [10]. The instability can presumably grow in any plasma where the ion density is in excess of about 10^7 cm^{-3}, but only if the anisotropy exceeds a critical value, which depends critically on the ratio T_e/T_i. For $T_e/T_i \ll 1$, the anisotropy required is large. As calculated by DRUMMOND, ROSENBLUTH and JOHNSON [11], for $T_e/T_i=0.1$, for example, they find the critical anisotropy is $t_c=0.015$. Their results apply to an infinite plasma, a rather poor approximation for the ALICE experiment. Nevertheless, if we assume, as seems reasonable, that the critical condition for this instability is not more restrictive in a finite plasma than in an infinite one, it appears that the trapped ion distributions in ALICE can be arranged so as not to violate the critical condition for the Harris instability. The margin of safety is, however, apparently less than in the case of the "mirror" instability.

3. *The "slow" Alfvén instability* is a wave-particle instability which is predicted to arise from a coupling between Doppler-shifted Alfvén waves propagating along the field lines and the cyclotron motion of ions in the high energy "tail" of the ion distribution function. This instability has been discussed for the case of "infinite" plasmas by ROSENBLUTH and WILSON [12, 13] and by SAGDEEV and SHAFRANOV [14]. These analyses show that, for Maxwellian distributions, the growth rate varies as $\exp(-\text{const.}/\beta)$, thus becoming very slow for $\beta \ll 1$. It is difficult, however, to apply the results of their analyses to the ALICE experiment during the build-up; the distribution functions at this time are decidedly non-Maxwellian, and the plasma is finite in size. If the theoretical criteria are taken at face value, however, it still appears that, once steady-state is reached in ALICE, the "slow" Alfvén instability will indeed grow too slowly to be of any importance. During build-up, the formal stability criterion for this instability may be violated, but it appears that it will nonetheless be inhibited by the absence of a high-energy tail to the particle distribution. This conjecture is yet to be verified, however.

We conclude that, although the margins of safety are not as large as one would like, it appears that all of the micro-instabilities we have considered can be avoided in ALICE, if not in its first operation, then at least after some reasonable changes in mode of operation are introduced.

5. Beam formation and vacuum technology

Protons (or deuterons) are produced at 20 keV in an ion source developed for this experiment. A view of the ion source is shown in Fig. 2, and Fig. 3 shows the ion-source vacuum system and magnet coils. Details of the construction and operation will be published elsewhere. The source operates continuously, and the mass-separated beam is extracted through the fringe field of the magnet used for maintenance of the arc. Some beam focus in both dimensions is obtained by careful placement of the source in relation to the fringe field. The total beam on a target of 2.5-cm $\times$ 8-cm dimensions located 100 cm from the source is as high as 0.32 amperes.

Beam neutralization is accomplished in a simple gas cell, and a neutral (H^0) beam of 0.10-ampere equivalent has been measured on a target of the above size at 360 cm from the source. If uniformly distributed, this beam intensity would correspond to 3×10^{16} atoms/cm^2 sec. The target distance corresponds to the plane of final collimation of the beam before entering the trapping field. Because of the collimation, the half-angle divergence of the transmitted beam is less than 10 milliradians.

Only a small fraction of the beam can be trapped until the highest plasma densities are achieved, and the bulk of the beam would constitute an unbearable gas load if allowed to terminate in the trapping chamber. Therefore, beyond the last collimator, the beam is allowed to expand freely and leaves the trapping chamber through a tube and differential pumping

* For a more complete discussion of these instabilities, the reader is referred to the paper by R. F. Post, "Critical Conditions for Self-sustaining Reactions in the Mirror Machine," given at the I.A.E.A. Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research, Salzburg. [*Nuclear Fusion:* 1962 Supplement, p. 99.]

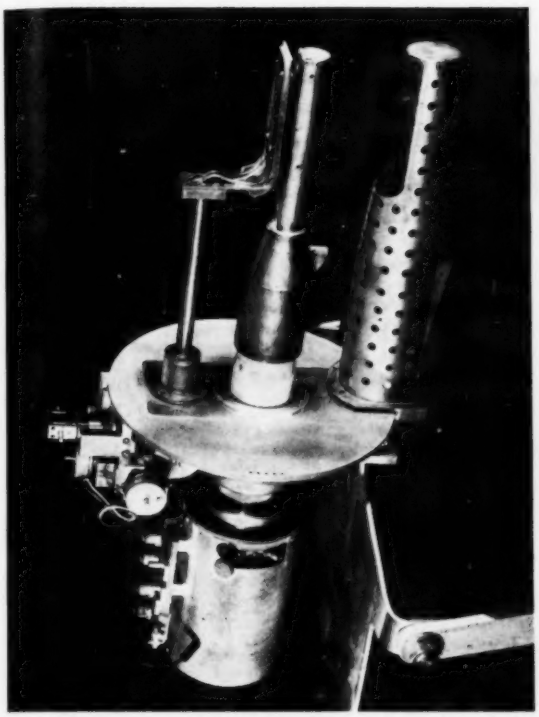


Fig. 2 Ion source with perforated arc-chamber shield removed.

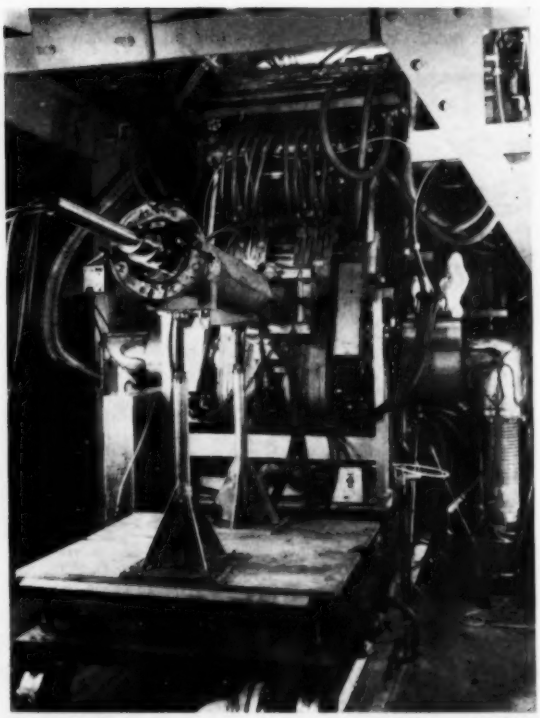


Fig. 3 The ion source vacuum system and magnet coils. The temporary target tube and target holder are in the foreground

system, finally terminating on a target of 14×33 cm at a distance of 10^3 cm from the ion source.

The required pressure reduction between the neutralizer cell and the trapping chamber amounts to six orders of magnitude. While well-trapped oil diffusion pumps are used for the basic evacuation, high-speed getter pumps accomplish the major pumping under the intermittent full gas load. For the highest vacuum regions, molybdenum gettering as described by HUNT, *et al.* [15] is employed.

Hydrogen, nitrogen, and water vapor have been considered for use as the neutralizing gas. All exhibit high neutralizing efficiency, and all can be adequately pumped. Water vapor is especially well pumped by cold baffles. Table II shows the pressure readings obtained on unshielded ionization gauges located in the trapping chamber while gas was admitted to the neutralizer. Gauge A indicated the average pressure rise, while gauge B was located in line with the beam-tube opening, approximately on the magnetic axis. The higher readings of gauge B were due to molecular streaming from the neutralizer. The high local gas density near the magnetic axis is, unfortunately, exactly where the minimum density is desired.

Several methods for minimizing the streaming suggest themselves. By taking advantage of molecule-molecule scattering, the pressure profile along the beam tube can be adjusted to reduce the streaming. On the basis of some numerical calculations, the pressure profile was adjusted empirically, using a combination of water and nitrogen in the neutralizer. The last entry in Table II shows the reduction in streaming realized. Further reduction by this method is anticipated, with more careful control of the pressure distribution along the beam tube.

Both mechanical and electrical methods of reducing the streaming are also possible, in view of the factor of 10^3 between the thermal-molecule and beam-atom

TABLE II Trapping chamber pressures for various neutralizer gases.
(All pressures are in mm Hg)

Gas	Base pressure	Neutralizer pressure	Increase in gauge A	Increase in gauge B
Hydrogen	1.3×10^{-10}	1.0×10^{-3}	2.5×10^{-10}	1.9×10^{-9}
Nitrogen	1.3×10^{-10}	1.0×10^{-3}	1.3×10^{-10}	1.3×10^{-9}
Water vapor	1.3×10^{-10}	1.0×10^{-3}	unmeasurable	2.2×10^{-9}
$H_2O + N_2$	1.3×10^{-10}	0.85×10^{-3}	0.5×10^{-10}	0.87×10^{-9}

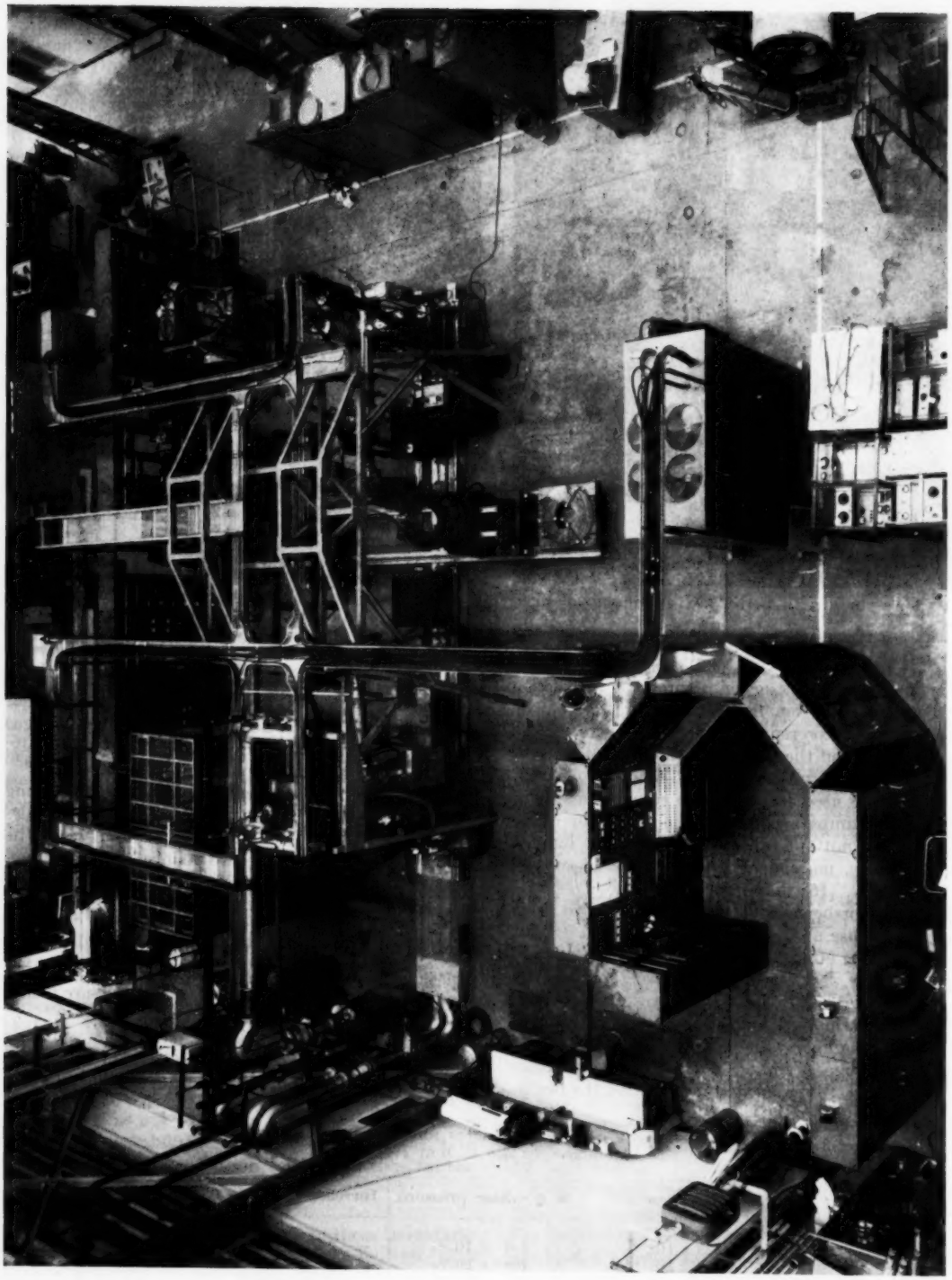


Fig. 4 An overhead view of the experimental area. The ion-source system is visible under the left end of the support structure.

velocities. However, these methods are difficult, and will be deferred unless proven necessary.

While the pressures attained appear to be adequate, some improvement is desirable, as no account has presently been made of high-energy beam atoms scattered from walls and slits to become additional thermal gas.

6. Trapping with cold plasma

In addition to the trapping of atoms by ionization on hot plasma, with initial trapping provided by the residual gas, it is possible to trap by means of a cold plasma separately introduced. Using the notation of Post [1], the equilibrium hot plasma density is simply deduced from the basic differential equation, assuming trapping only by cold plasma, and loss only by charge-exchange:

$$n_f = \frac{I_0 L}{V v} \times \frac{n_i}{n_0} \left\{ \frac{\sigma_1 + \sigma_{10\,(A)} + \langle \sigma v_{i0} \rangle / v}{\sigma_{10\,(M)}} \right\}. \qquad (1)$$

The cold ions are assumed to be hydrogen, as well as the neutral gas. Since the ratio of the cross-sections involved is nearly unity (the neutralizing cross-sections dominate), n_f approaches the beam-atom density increased by the ratio of plasma density to neutral gas density. A high degree of ionization of the cold plasma is certainly required. The characteristic growth time is the charge-exchange period:

$$\tau_{cx} = \frac{1}{n_0 \sigma_{10\,(M)} v}. \qquad (2)$$

This time is generally short ($\tau_{cx} \ll 1$ sec), so that the cold plasma need only be of a transient nature.

Continued growth of the hot plasma density above the level set by Eq. (1) depends again upon exceeding the critical condition for exponential growth. Conceivably, the critical condition could be exceeded in the presence of the cold plasma, and trapping would continue to the diffusion limit. The primary effect of the cold plasma, then, is to reduce the total time of trapping. More realistically, the critical condition would not be met in the presence of cold plasma, but, at the termination of the transient plasma, the pressure would be reduced by fast pumping more quickly than the plasma decays by charge-exchange. At the point that the pressure drops below the critical value, exponential growth would ensue. Again, the cold plasma has functioned to shorten the total injection time.

However, even if the critical condition for exponential growth is never achieved, a transient plasma with suitable characteristics could raise the hot plasma density to interesting levels.

The cold plasma is most readily introduced through the magnetic mirror, on axis. Many of the charged plasma particles can then exit through the opposite mirror into a fast vacuum pump. One type of plasma generator currently under investigation for this application is the titanium washer source, as described by Coensgen, *et al.* [16]. From the published performance, a cold plasma density of 5×10^{12} cm^3 for 20 to 100 μsec is predicted. Experiments are currently underway to measure the accompanying pressure pulse, under conditions approximating those in the trapping experiment.

7. Conclusion

With the set of parameters chosen for the present experiment, the conditions necessary for plasma growth to high density levels by fast atom trapping have been well established. Technological progress has been adequate to meet the requirements of beam intensity, vacuum, and magnetic field. The coalescence of the various elements comprising the trapping experiment is underway.

That the necessary conditions for plasma growth are also sufficient is not yet as well established, although the roster of known instabilities is not unfavorable. Granted some margin of excess in meeting the necessary conditions, it should be possible to explore and circumvent any instability encountered, if, in the nature of things, a stable region exists.

Acknowledgment

This work was performed under the auspices of the United States Atomic Energy Commission.

References

[1] Post, R. F., Fast Neutral Particle Injection into a Mirror Machine, Risö Report No. 18, presented at the Plasma Physics Summer School, Roskilde, Denmark, August 1—13, 1960.
[2] Post, R. F., Damm, C. C., *Bull. of Am. Phys. Soc.* **5** (1960) 233.
[3] Garren, A., Riddell, R. J., Smith, L., Bing, G., Henrich, L. R., Northrop, T. G., Roberts, J. E., Proc. of the Second U.N. International Conference on Peaceful Uses of Atomic Energy, Geneva, **31** (1958) 65.
[4] Futch, A. H., Damm, C. C., Heckrotte, W., Killeen, J., *Bull. of Am. Phys. Soc.* **5** (1960) 233.
[5] Futch, A. H., Damm, C. C., Heckrotte, W., Killeen, J., Mish, L., *Bull. of Am. Phys. Soc.* **6** (1961) 201.
[6] Post, R. F., Ellis, R. E., Ford, F. C., Rosenbluth, M. N., *Phys. Rev. Letters* **4** (1960) 166.
[7] Coensgen, F. H., Cummins, W. F., Nexsen, W. E., Jr., Sherman, A. E., *Phys. Rev. Letters* **5** (1960) 459.
[8] Rosenbluth, M. N., Los Alamos Report LA-2030 (1956, unpublished).
[9] Post, R. F., Perkins, W. A., *Phys. Rev. Letters* **6** (1961) 85.
[10] Harris, E., *Phys. Rev. Letters* **2** (1959) 34.
[11] Drummond, W. E., Rosenbluth, M. N., Johnson, M. L., *Bull. of Am. Phys. Soc.* **6** (1961) 185.
[12] Rosenbluth, M. N., Proc. of the Second U.N. International Conference on Peaceful Uses of Atomic Energy, Geneva **31**, (1958) 90.
[13] Rosenbluth, M. N., Wilson, K., Dispersion Relations for Infinite Plasmas, 1957 (unpublished).
[14] Sagdeev, R. F., Shafranov, V. D., *Zhur. Exptl. i Teoret. Fiz.* **39** (1960) 181.
[15] Hunt, A. L., Damm, C. C., Popp, E. C., "Attainment of Ultrahigh Vacuum, Reduction in Surface Desorption, and the Adsorption of Hydrogen by Evaporated Molybdenum", *J. Appl. Phys.* **32** (1961) 1937.
[16] Coensgen, F. H., Cummings, W. F., Sherman, A. E., *Phys. Fluids* **2** (1959) 350.

(Manuscript received 17 July 1961.)

Fig. 4 An overhead view of the experimental area. The ion-source system is visible under the left end of the support structure.

ЯДЕРНЫЙ СИНТЕЗ 1 (1961)

ТУРБУЛЕНТНАЯ КОНВЕКЦИЯ ПЛАЗМЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Б. Б. Кадомцев

Институт атомной энергии им. И. В. Курчатова

Академии наук СССР, Москва, СССР

В настоящей работе известная аналогия между конвекционной неустойчивостью обычной жидкости и одним из наиболее опасных видов неустойчивости плазмы в магнитном поле — так называемой конвективной, или перестановочной, распространяется на нелинейные течения, возникающие вследствие неустойчивости. В первой части работы рассматривается турбулентная конвекция плазмы в ловушках с магнитными пробками и в разряде с умеренным продольным полем. На этом пути удается объяснить ряд особенностей поведения плазмы в экспериментальных устройствах такого типа. Во второй части рассматривается конвекция, возникающая в плазме при наличии продольного тока. Показано, что на основе механизма токовой конвекции можно объяснить «аномальную» диффузию плазмы положительного столба.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение 286
2. Некоторые сведения о турбулентности в обычной жидкости 287
2.1. Неустойчивость, колебания, турбулентность . 287
2.2. Конвекция 287
2.3. Турбулентные струи 289

ДИАМАГНИТНАЯ КОНВЕКЦИЯ ПЛАЗМЫ

3. Конвективная неустойчивость 290
3.1. Диамагнитное выталкивание плазмы 290
3.2. Условие конвективной устойчивости 291
3.3. Стабилизирующее действие проводящих торцов 291
3.4. Эффект перекрещенности силовых линий . . 292
4. Конвекция плазмы низкой плотности . . 292
5. Турбулентная конвекция плазмы в ловушке с магнитными пробками 294
6. Конвекция плазмы в поле прямого тока . . 295
7. Турбулентный разряд в продольном магнитном поле 296
8. Винтовая неустойчивость 299
9. Винтовой разряд 300
10. Турбулентная диффузия магнитного поля . 301
10.1. Перемешивание поля 301
10.2. Возникновение обратного поля 302

ТОКОВАЯ КОНВЕКЦИЯ ПЛАЗМЫ

11. Токово-конвективная неустойчивость 303
12. Неустойчивость положительного столба в магнитном поле и ламинарная конвекция 304
13. Турбулентная конвекция плазмы положительного столба 305
14. Турбулентная утечка частиц из разряда в сильном магнитном поле 305
15. Заключение 306

1. Введение

Одна из характерных особенностей плазмы заключается в той легкости, с какой в ней возбуждаются самые различные шумы и колебания. Плазма в экспериментальных условиях и особенно при наличии магнитного поля редко бывает спокойной, и поэтому термином «спокойная плазма» можно пользоваться, пожалуй, только в теоретических исследованиях. Тем не менее, чтобы получить полную ясность в том, почему и какие именно шумы возбуждаются в плазме, мы неизбежно должны исходить из некоторого идеализированного спокойного состояния. Если малые возмущения такого состояния затухают со временем, то такое состояние называется устойчивым, а если малые отклонения от положения равновесия нарастают со временем, то исходное состояние неустойчиво. Во втором случае имеется следующая альтернатива: либо система перейдет в другое равновесное состояние, являющееся устойчивым, либо такого состояния не существует, и тогда в системе возникнет некоторое нестационарное движение, возможно, довольно сложное. Типичным примером второй ситуации является турбулентное течение обычной жидкости при очень большом числе Рейнольдса. Вследствие неустойчивости в таком течении возбуждается настолько большое число степеней свободы, что для его описания приходится использовать статистические методы.

То обстоятельство, что в плазме легко возбуждаются шумы, показывает, что в реальных условиях плазма чаще всего бывает неустойчива. Отсюда следует, что исследование устойчивости плазмы является необходимой предпосылкой для полного понимания происходящих в ней физических процессов. Исследованию неустойчивости плазмы было посвящено огромное количество теоретических работ, благодаря которым в этом вопросе достигнут значительный прогресс, и физические причины многих видов неустойчи-

вости доведены до полной ясности (см., например, обзор [1]).

Неустойчивости плазмы можно разбить на две большие группы: гидромагнитные и кинетические. Гидромагнитными мы условимся называть такие неустойчивости, которые связаны с перемещением в пространстве отдельных макроскопических участков плазмы. Это неустойчивости, видимые, так сказать, «на глаз». Для исследования таких неустойчивостей можно пользоваться уравнениями магнитной гидродинамики, откуда и происходит их название. Кинетические неустойчивости являются проявлением более тонких эффектов: для них существенно различное поведение отдельных частиц в одном и том же месте пространства, поэтому их исследование может быть проведено только на основе кинетического уравнения с самосогласованным полем. Типичным примером такой неустойчивости является «пучковая» неустойчивость, возникающая в результате взаимодействия частиц пучка с электронами и ионами плазмы. Кинетические неустойчивости как правило связаны с высокочастотными коротковолновыми колебаниями, и в этом смысле они являются как бы «микроскопическими» по отношению к крупномасштабному и более медленному гидродинамическому движению.

Соответственно и те нелинейные движения, которые возникают вследствие неустойчивости, можно приближенно разбить на те же две группы — медленные, или гидродинамические, и быстрые, или кинетические. В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением только гидромагнитных движений, в соответствии с чем для описания плазмы будем пользоваться уравнениями магнитной гидродинамики. Как будет показано ниже, можно провести далеко идущую аналогию между плазмой в неоднородном магнитном поле и несжимаемой жидкостью в поле тяжести. А именно, движение плазмы, возникающее за счет ее неустойчивости, оказывается сходным с турбулентной конвекцией обычной жидкости. В связи с этим, чтобы не отсылать читателя к другим статьям, мы сочли уместным включить сюда изложение некоторых вопросов турбулентности обычной жидкости.

В работе попутно кратко излагаются основные вопросы гидромагнитной неустойчивости плазмы, и в этом отношении она в известной мере носит обзорный характер.

2. Некоторые сведения о турбулентности в обычной жидкости

2.1. Неустойчивость, колебания, турбулентность

В комнате со спокойным воздухом можно наблюдать, как поднимающаяся от горящей сигареты струйка дыма начинает сначала незначительно, затем все сильнее и сильнее извиваться, превращается в отдельные причудливые струйки, которые сливаются затем в широкую, хаотически

Рис. 1 Конвекционная струя над нагретым телом.

движущуюся струю (см. рис. 1). Этот пример является типичным для многих явлений, когда при увеличении некоторого параметра (в данном случае числа Рейнольдса) в системе сначала теряется устойчивость, затем амплитуда колебаний возрастает, и в конце концов происходит переход в турбулентный режим [2].

Переход от устойчивого ламинарного течения к турбулентному можно подразделить на несколько ступеней, которые отличаются как по характеру движения жидкости, так и по тем математическим методам, которые используются для их описания. Для наглядности обратимся опять к рис. 1. Цифрой 1 здесь отмечена область устойчивого течения; для ее описания достаточно найти соответствующее стационарное решение уравнения Навье-Стокса. Вся последующая область струи неустойчива и в свою очередь она может быть разбита на следующие участки:

2 — участок малых колебаний, где можно пользоваться линеаризованными уравнениями гидродинамики.

3 — участок колебаний с конечной амплитудой. Для описания движения в этой области можно воспользоваться методом разложения по амплитуде колебания, аналогичным методу Ван-дер-Поля, используемому для исследования колебаний слабо нелинейных систем с конечным числом степеней свободы. Такой приближенный метод условимся называть квазилинейным.

4 — переходная область очень сложного движения, практически не описываемого количественно.

5 — турбулентная струя. На этом участке движение жидкости становится настолько хаотическим, что его можно описывать статистически, выделяя некоторое среднее движение, на которое наложены пульсации различных амплитуд и пространственных масштабов.

В последующем изложении вопросов турбулентной конвекции плазмы мы также будем по возможности стараться проследить за аналогичным переходом к турбулентности, начиная с момента появления неустойчивости.

2.2. Конвекция

Конвективная неустойчивость представляет собой наиболее простой вид неустойчивости в обычной жидкости. Пусть плотность ϱ идеальной жид-

кости возрастает с высотой, так что более тяжелые слои расположены над более легкими. Такое состояние является, очевидно, неустойчивым. Чтобы определить инкремент нарастания малых возмущений, следует воспользоваться линеаризованными уравнениями гидродинамики. Допустим, что длина волны возмущения много меньше характерной длины, на которой происходит изменение плотности. Для таких возмущений зависимость от координат можно выбрать в виде плоской волны, и для несжимаемой жидкости будем иметь:

$$-\mathrm{i}\,\omega\,\mathbf{v}' + \mathrm{i}\,\mathbf{k}\,p' = \varrho'\,\mathbf{g}\,, \tag{2.1}$$

$$-\mathrm{i}\,\omega\,\varrho' + v_{z'}\,\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}z} = 0\,, \tag{2.2}$$

где ω — частота возмущения вида $\exp(-\mathrm{i}\omega t + \mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$, p' — возмущение давления, $\mathbf{g}$ — ускорение силы тяжести, направленной по $-z$, ϱ' — возмущение плотности. Пользуясь условием несжимаемости $\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}' = 0$, исключаем p' и находим уравнение для определения ω:

$$\omega^2 = -\frac{k_\perp{}^2}{k^2}\,\frac{g}{\varrho}\,\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}z}\,, \tag{2.3}$$

где $k_\perp{}^2 = k_x{}^2 + k_y{}^2$, $k^2 = k_\perp{}^2 + k_z{}^2$.

Как видно из уравнения (2.3), при $\mathrm{d}\varrho/\mathrm{d}z > 0$, т.е. $\mathbf{g}\cdot\nabla\varrho < 0$ частота ω становится мнимой, что при $\mathrm{Im}\,\omega > 0$ означает экспоненциальное нарастание малых возмущений.

В предельном случае резкой границы неустойчивость тяжелой жидкости над легкой называют неустойчивостью Релея-Тейлора.

Аналогичная неустойчивость имеет место в жидкости, находящейся в пористой среде. В этом случае инерционные силы несущественны, и первый член в (2.1) следует заменить просто на силу трения $\mathbf{F} = -\alpha\mathbf{v}'$, взятую с обратным знаком. Выражение для инкремента нарастания малых возмущений принимает вид:

$$\mathrm{Im}\,\omega = \frac{k_\perp{}^2}{k^2}\,\frac{g}{\alpha\varrho}\,\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}z}\,. \tag{2.4}$$

В реальных условиях конвективная неустойчивость возникает за счет теплового расширения газа или жидкости, подогреваемых снизу.

Как обнаружил Бенар [3], конвекционное движение в слое жидкости между двумя пластинками возникает только в том случае, если градиент температуры превосходит некоторое определенное значение. Это явление, объясненное Релеем [4] (см. также [5]), связано с тем, что при движении жидкости со скоростью $\mathbf{v}'$ между пластинками, находящимися на расстоянии d друг от друга, возникают вязкие силы $\sim \nu\varrho v'/d^2$, где ν — кинематическая вязкость. Поэтому конвекция может возникнуть лишь при условии, что сила вязкости будет меньше $\varrho' g = \beta\varrho g T'$, где T' — возмущение температуры, β — коэффициент объемного расширения. Возмущение температуры определяется балансом между конвекционным переносом тепла и выравниванием температуры за счет теплопроводности, так что для возмущений масштаба d, $\chi T/d^2 \sim v'\mathrm{d}T/\mathrm{d}z$, где χ — температуропроводность. Отсюда получаем, что неустойчивость возникает только в том случае, если безразмерная величина $Ra = (\beta g d^4/\nu\chi)\,\mathrm{d}T/\mathrm{d}z$, называемая числом Релея, превосходит некоторое критическое значение Ra_c.

Если число Релея не намного превосходит критическое значение, то в жидкости возникают правильные шестиугольные ячейки конвекционного движения [3]. Количественно такое движение описывается в квазилинейном приближении [6—10]. При этом учитывается, что возникающая конвекция приводит к уменьшению среднего градиента температуры внутри жидкости и таким образом ограничивает дальнейшее нарастание возмущения. Установившаяся амплитуда оказывается пропорциональной $\sqrt{Ra - Ra_c}$, а тепловой поток по-прежнему линейно растет с температурой, но несколько быстрее, чем в отсутствие конвекции. Если учесть зависимость вязкости от температуры, то можно объяснить [9] образование шестиугольных ячеек: при такой симметрии больше всего различаются между собой восходящий и нисходящий потоки, и тем самым создается возможность образования энергетически наиболее выгодного течения, когда в центральной части ячейки, куда сходятся все потоки с периферии, жидкость обладает минимальной вязкостью. Согласно такой точке зрения в центре ячейки у жидкости должен быть восходящий, а у газа — нисходящий поток, что и наблюдается экспериментально.

Как показывает эксперимент [8], ячейки существуют вплоть до значений числа Релея, на порядок превышающих критическое. При этом во всей этой области поток тепла практически линейно зависит от температуры. При дальнейшем увеличении числа Релея ячейки, в свою очередь, становятся неустойчивыми, и наконец, при $Ra \gg Ra_c$ развивается турбулентная конвекция.

Так как конвекционный перенос тепла может намного превышать перенос тепла за счет теплопроводности, то при турбулентной конвекции температура жидкости является почти постоянной всюду, за исключением пристеночных областей. Поэтому достаточно рассмотреть лишь одну из стенок, скажем, нижнюю. Представим температуру жидкости в виде $T + T'$, где T — средняя температура за большой промежуток времени, а T' — пульсация температуры, обусловленная конвекционным движением. При перемещении некоторого участка жидкости на расстояние λ температура отклоняется от средней на величину $T_\lambda' \sim \lambda\,\mathrm{d}T/\mathrm{d}z$. Таким образом, T' можно представить в виде набора пульсаций различных масштабов T_λ', причем пульсация тем больше, чем больше ее масштаб λ. Поскольку перенос тепла осуществляется за счет конвекции, то тепловой поток q равен среднему значению от $\varrho c_0 v' T'$, где ϱ — плотность жидкости, c_0 — ее теплоемкость, v' — пульсация скорости. Таким образом, q можно представить в виде:

$$q = -\varrho\,c_0\,\chi_r\,\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}\,, \tag{2.5}$$

где $\chi_T = \langle \lambda v_\lambda' \rangle$ — коэффициент турбулентной температуропроводности. Пульсацию скорости можно найти, приравнивая кинетическую энергию пульсации работе силы тяжести $(v')^2/2 \sim T' \beta \lambda g \sim$ $\sim q g \beta \lambda / v' \varrho c_0$. Определяя отсюда v', находим:

$$\chi_T = A \left(\frac{q \beta g}{\varrho c_0} \right)^{\frac{1}{3}} z^{\frac{4}{3}}, \qquad (2.6)$$

где A — численный коэффициент порядка единицы. При выводе этого выражения мы учли, что тепловой поток определяется пульсациями наибольшего масштаба, который ограничен расстоянием от стенки z, поскольку опускающийся вниз участок жидкости, находившийся вначале на расстоянии z от стенки, не может совершить вертикальное смещение больше z.

При установившейся конвекции $q = \text{const}$., и из (2.5) находим распределение средней температуры:

$$T = T_0 + \frac{3 q^{2/3}}{A (\beta g)^{1/3} (\varrho c_0)^{2/3}} \cdot z^{-\frac{1}{3}}, \qquad (2.7)$$

где T_0 — температура вдали от стенки, т.е. при $z \to \infty$.

Выражением (2.7) нельзя пользоваться при малых z, так как очень близко около стенки основным механизмом переноса тепла становится молекулярный. Допустим, что $\chi \sim \nu$. Тогда турбулентная конвекция будет иметь место вплоть до расстояния $z = z_0$, где $\chi_T = \chi$, т.е. $z_0 = (\chi/A)^{3/4} (\varrho c_0 / q \beta g)^{1/4}$. Полагая $T \approx T_s$ при $z \approx z_0$, найдем из (2.7):

$$\frac{q}{\varrho c_0 (T_s - T_0)} = B \left[\frac{(T_s - T_0) \beta g}{\chi} \right]^{\frac{1}{3}}, \qquad (2.8)$$

где T_s — температура стенки, B — некоторый численный коэффициент. Такая зависимость действительно наблюдается на эксперименте.

Таким образом, качественно можно представить себе следующую идеализированную картину конвекции [11]. Нагревающиеся от стенки самые нижние слои жидкости из-за неустойчивости поднимаются вверх и нагревают выше лежащие слои. Вследствие этого создается возможность развития более крупных пульсаций, которые прогревают более толстый слой жидкости и т.д. Если бы перемешивание внутри каждого масштаба было очень хорошим, то наблюдалась бы именно такая автомодельная эстафета от мелких пульсаций к более крупным. К сожалению, весь слой, в котором происходит основное изменение температуры, является довольно тонким: его толщина оказывается порядка толщины ламинарного подслоя. Поэтому хорошего перемешивания ожидать трудно. Как показывает эксперимент [12], реальная конвекция имеет гораздо более сложную структуру, а именно, из пристеночной области время от времени выбрасываются отдельные турбулентные струи. Тем не менее, такие грубые характеристики турбулентной конвекции, как связь q с $T_s - T_0$, или распределение средней температуры вблизи стенки, удовлетворительно согласуются с моделью подобия турбулентности на разных расстояниях от стенки.

Близкой по характеру к конвекционной неустойчивости является исследованная Тейлором неустойчивость жидкости между вращающимися цилиндрами. И в этом случае при малой надкритичности неустойчивость проявляется в образовании «конвекционных» ячеек, которые могут быть описаны в квазилинейном приближении [13].

2.3. Турбулентные струи

В основе развития турбулентности в струях лежит неустойчивость тангенциального разрыва (неустойчивость Кельвина-Гельмгольца). Рассмотрим два потока несжимаемой жидкости плотности ϱ, движущихся в противоположные стороны с одинаковой скоростью v и соприкасающихся между собой по некоторой плоской границе. Допустим, что в начальный момент граница подвергнута некоторому искривлению с длиной волны λ и амплитудой ξ. При таком искривлении скорость жидкости над вершиной волны увеличится, а над впадиной уменьшится на величину $\sim v \xi/\lambda$, и следовательно, по закону Бернулли появится возмущение давления $p' \sim \varrho v^2 \xi/\lambda$ такого знака, что оно будет способствовать возрастанию начального смещения границы. Так как при таком возмущении в движение вовлекается слой жидкости толщиной $\sim\lambda$, то $\varrho \lambda \ddot{\xi} \approx$ $\approx \varrho v^2 \xi/\lambda$, откуда получаем, что инкремент нарастания малых возмущений $\operatorname{Im} \omega \sim v/\lambda$ быстро растет с уменьшением длины волны. Отсюда можно сделать вывод, что граница между встречными потоками должна размываться со временем, причем перемешивание потоков должно иметь диффузионный характер: сначала развиваются самые мелкие возмущения, затем, по мере расширения переходного слоя, все более и более крупные.

В экспериментальных условиях тангенциальный разрыв образуется, например, при вытекании струи жидкости в покоющуюся жидкость (так наз. затопленная струя). Теория турбулентных струй была развита Прандтлем и Толмином (см. [14, 15]).

Согласно Прандтлю развивающиеся вследствие неустойчивости пульсации скорости в струе приводят к переносу количества движения (точнее, завихренности) поперек струи. Поток импульса можно представить в виде

$$\sigma = \varrho l^2 \left| \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} \right| \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}, \qquad (2.9)$$

где l — длина пути перемешивания, u — продольная скорость, y — координата поперек струи. Множитель $l^2 |\mathrm{d}u/\mathrm{d}y|$ перед $\varrho\, \mathrm{d}u/\mathrm{d}y$ можно рассматривать как коэффициент турбулентной диффузии, причем l имеет смысл длины пробега отдельного участка жидкости, а величину $l |\mathrm{d}u/\mathrm{d}y|$, равную разности скоростей на длине $\sim l$, можно интерпретировать как скорость перемешивания. Прандтль предположил, что l является постоянной поперек струи и пропорциональной ее полу-

ширине b. Рассчитанный по такой теории профиль струи при надлежащем выборе константы l/b согласуется с экспериментально измеренным буквально с точностью до нескольких процентов, хотя дальнейшие исследования показали, что более тонкая структура турбулентной струи не вполне согласуется с простыми допущениями Прандтля (см., например, [15]).

Выражение (2.9) для потока импульса σ можно использовать и для турбулентного течения в трубах, но при этом длину перемешивания l вследствие стабилизирующего действия стенок следует считать пропорциональной расстоянию y от стенки. Так как вблизи стенки $\sigma=\text{const}$., то отсюда следует известный логарифмический профиль скорости.

ДИАМАГНИТНАЯ КОНВЕКЦИЯ ПЛАЗМЫ

3. Конвективная неустойчивость

3.1. ДИАМАГНИТНОЕ ВЫТАЛКИВАНИЕ ПЛАЗМЫ

Как известно, плазма в магнитном поле ведет себя как диамагнитное вещество: ее давление полностью воспринимается магнитным полем, и вследствие этого магнитное поле внутри нее несколько ослабевает. Как всякий диамагнетик, плазма выталкивается из областей с более сильным магнитным полем, и поэтому ее поведение в магнитном поле должно быть во многом сходно с поведением жидкости в поле тяжести.

Рис. 2 Силовая трубка с плазмой в тороидальном магнитном поле.

Мы начнем с самого простого примера, а именно, рассмотрим кольцевую трубку с плазмой, находящуюся в тороидальном магнитном поле (см. рис. 2). Отдельные заряженные частицы в таком поле наряду со свободным движением вдоль силовых линий испытывают дрейф вдоль оси z. При максвелловском распределении по скоростям средняя скорость дрейфа равна $v_d=2\,cT/eHr$, где T — температура, H — величина магнитного поля, r — радиус кривизны силовой линии. Так как скорости дрейфа электронов и ионов направлены в разные стороны, то вследствие разделения зарядов появится электрическое поле вдоль оси z, которое приводит к дрейфу в радиальном направлении. Учитывая силу инерции в выражении для скорости дрейфа ионов, имеем:

$$\dot{E}=\frac{H}{c}\,\dot{v}=4\pi e n\left\{\frac{2c\,(T_i+T_e)}{eHr}-\frac{cM}{eH}\,\dot{v}\right\},$$

где n — плотность электронов и ионов. Отсюда находим:

$$\dot{v}=\frac{\Omega_0^2}{\Omega_0^2+\Omega_H^2}\cdot\frac{2p}{Mnr}, \tag{3.1}$$

где

$$\Omega_0^2=\frac{4\pi e^2 n}{M},\quad \Omega_H=\frac{eH}{Mc},\quad p=n\,(T_i+T_e).$$

С помощью соотношения (3.1) можно оценить, начиная с какой плотности совокупность электронов и ионов можно рассматривать как плазму. Для этого необходимо, очевидно, чтобы за время полного разделения электронов и ионов их радиальная скорость возросла до значения $\sim v_d$. Отсюда получаем

$$r_d^2<ar, \tag{3.2}$$

где a — поперечный размер трубки с плазмой, $r_d=(T/M\Omega_0^2)^{1/2}$ — дебаевский радиус [в отличие от обычного определения дебаевского радиуса при $T_e\neq T_i$ здесь следует понимать $T=\max\,(T_e,\,T_i)$].

В другом предельном случае $\Omega_0^2\gg\Omega_H^2$ соотношение (3.1) можно получить гидродинамически. Допустим, что давление плазмы много меньше давления магнитного поля, т.е. $\beta=8\pi p/H^2\ll 1$. Тогда искажением магнитного поля за счет диамагнетизма плазмы можно пренебречь. Так как плазма стремится расшириться, то трубка с плазмой выталкивается в сторону увеличения своего объема. Однако движение трубки в сильном магнитном поле не является свободным: всякое заметное ее искривление связано с большим увеличением магнитной энергии и поэтому недопустимо. Допустимым является лишь такое перемещение трубки, при котором магнитное поле остается неизменным, т.е. магнитное поле в том месте, куда приходит трубка, должно остаться практически тем же, что и до ее прихода. Объем трубки равен $V=\oint s\,dl=\varphi\oint dl/H$, где $\varphi=sH=\text{const}$. есть вмороженный в трубку поток, s — ее поперечное сечение. Таким образом, объем трубки с плазмой V пропорционален интегралу $\oint dl/H$ по силовой линии в месте ее расположения. Так как при увеличении объема трубки на величину dV плазма совершает работу $p\,dV$, то ускорение трубки с плазмой равно

$$\dot{v}=\frac{p}{MnV}\frac{dV}{dr}=-\frac{p}{Mn|U|}\frac{dU}{dr}, \tag{3.3}$$

где величину $U=-\oint dl/H$ можно рассматривать как «потенциальную» энергию трубки в магнитном поле. В тороидальном магнитном поле $H\sim r^{-1}$, $U\sim -r^{+2}$ и соотношение (3.3) совпадает с (3.1) при $\Omega_0^2\gg\Omega_H^2$.

3.2. Условие конвективной устойчивости

Для магнитного поля с замкнутыми силовыми линиями условие устойчивости плазмы низкого давления может быть записано в довольно общем и вместе с тем сравнительно простом виде. Как мы установили выше, трубка с плазмой в заданном магнитном поле движется в сторону уменьшения $U = -\oint \mathrm{d}l/H$. Наоборот, если вся область заполнена плазмой и лишь одна трубка является пустой, то такой своеобразный «пузырек» будет выталкиваться в сторону возрастания U. По аналогии с неоднородной жидкостью в поле силы тяжести отсюда можно заключить, что плазма будет в равновесии только в том случае, если ее давление будет постоянно на поверхности постоянного U, т.е. при $p = p(U)$.

Рассмотрим теперь вопрос об устойчивости такого равновесного состояния плазмы. Предположим, что некоторая трубка с плазмой смещается на бесконечно малую величину, раздвигая остальные трубки. Если это смещение конвективного типа, не искажающее магнитное поле, то относительное изменение объема трубки равно $\delta V/V = \mathrm{d}U/U$, а изменение давления за счет адиабатического расширения $\delta p = -\gamma p\, \mathrm{d}U/U$. Давление же в трубках, окружающих рассматриваемую нами смещенную трубку, равно $p(U+\mathrm{d}U) = p + (\mathrm{d}p/\mathrm{d}U)\,\mathrm{d}U$.

Если смещение происходит в сторону возрастания U, а давление в смещенной трубке оказывается меньше, чем давление окружающей ее плазмы, то трубка будет стремиться всплывать дальше, и следовательно, такое распределение плазмы неустойчиво. Если же давление в трубке окажется больше, т.е. $-\gamma p\, \mathrm{d}U/U > (\mathrm{d}p/\mathrm{d}U)\,\mathrm{d}U$, то трубка будет вытеснятся обратно, и плазма устойчива. Таким образом, в магнитной ловушке с замкнутыми силовыми линиями имеет место следующее условие устойчивости:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}U} < \frac{\gamma p}{|U|}. \tag{3.4}$$

Отсюда следует, что устойчивыми являются не только такие состояния плазмы, когда давление убывает с U [16], но и состояния, в которых давление возрастает с U, но не слишком быстро [17]. Это условие вполне аналогично условию конвекционной устойчивости сжимаемого газа в поле тяжести.

Для поля прямого тока, где U убывает как $-r^2$ при удалении от проводника, условие устойчивости принимает вид:

$$-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} < \frac{2\gamma p}{r}. \tag{3.5}$$

Отсюда следует, что при хорошей теплопроводности, когда можно считать $\gamma = 1$, плазма низкого давления устойчива, если ее давление спадает при удалении от проводника не быстрее, чем r^{-2}.

3.3. Стабилизирующее действие проводящих торцов

Вопрос о конвективной неустойчивости плазмы наиболее интересен с точки зрения удержания плазмы в ловушке с магнитными пробками (см. рис. 3). В такой ловушке горячая плазма занимает лишь центральную часть объема и не соприкасается с торцами C. Для такого распределения плазмы все рассуждения о разделении зарядов и выталкивании трубок в сторону ослабления магнитного поля сохраняют свою силу. (Следует отметить, что при анизотропном распределении ионов по скоростям может оказаться, что основная часть плазмы будет расположена вблизи пробок (зеркал). Такое распределение, как показано Розенблютом и Лонгмайром [16], может быть устойчивым).

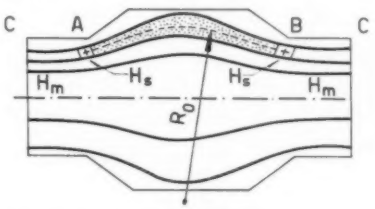


Рис. 3 Ловушка с магнитными пробками.

Ситуация существенно изменяется, если пространство между горячей плазмой и торцами C заполнено холодной плазмой, т.е. осуществляется электрический контакт с торцами. При этом появляется возможность компенсации электрических зарядов, возникающих за счет относительного дрейфа электронов и ионов, и конвективные возмущения в виде перестановок целых трубок могут оказаться запрещенными [18, 19].

Однако даже при идеальном электрическом контакте плазма с достаточно большим давлением может быть неустойчива по отношению к возмущениям, соответствующим перестановке силовых трубок с закрепленными концами, которые считаются вмороженными в металл. Так как при этом $\mathrm{rot}\,\mathbf{E} \neq 0$, то силовые линии магнитного поля искривляются (они увлекаются вместе с трубками). За счет возмущения магнитного поля возникает некоторая возвращающая сила, приводящая к дополнительной стабилизации плазмы. Пусть L есть длина ловушки, а ξ — смещение трубки по радиусу. Изменение магнитного поля за счет изгиба силовых линий приближенно равно $H' \approx (\pi H/L)\,\xi$, так что изменение энергии магнитного поля $W_H' \approx V(\pi H^2/8L^2)\,\xi^2$, где V — объем трубки. Сравнивая это выражение с работой

$$W_p' \approx \frac{V}{2}\left\{\gamma p\left(\frac{\nabla U}{U}\right)^2 + \frac{\nabla p \cdot \nabla U}{U}\right\}\xi^2,$$

совершаемой плазмой при ее смещении, мы получим следующее условие устойчивости:

$$-\frac{\nabla p \cdot \nabla U}{U} < \gamma p\left(\frac{\nabla U}{U}\right)^2 + \frac{\pi H^2}{4L^2}. \tag{3.6}$$

Здесь второе слагаемое как раз и учитывает стабилизирующее действие проводящих торцов [19, 20].

Природной ловушкой такого типа является магнитное поле Земли, поскольку плотную проводящую ионосферу с хорошей точностью можно считать твердым идеальным проводником. Так как поле диполя спадает с радиусом как r^{-3}, то условие устойчивости плазмы в поясах Ван-Аллена принимает вид:

$$-r\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} < 4\gamma p + \frac{aH^2}{8\pi}, \qquad (3.7)$$

где a — численный множитель порядка единицы, r — радиус в экваториальной плоскости.

3.4. Эффект перекрещенности силовых линий

Аналогичный стабилизирующий эффект имеет место в полях с «перекрещенными» силовыми линиями. В качестве простейшего примера мы рассмотрим здесь конвективную неустойчивость прямого цилиндрического шнура с распределенным продольным током. При наличии продольного магнитного поля H_z силовые линии в токовом шнуре являются винтовыми с шагом $l=2\pi/\mu$, где $\mu=H_\theta/rH_z$, H_θ — азимутальное магнитное поле. Поскольку силовые линии являются выпуклыми, то отдельная трубка с плазмой стремится «вырваться» наружу. По аналогии с (3.1) можно сказать, что на нее действует выталкивающая сила $2p/R$, где $R=rH^2/H_0^2$ — радиус кривизны силовой линии. Следовательно, если некоторая трубка с плазмой давления $p(r)$ сместится по радиусу на расстояние ξ, вытолкнув при этом плазму с давлением $p(r+\xi)$, то на единицу объема плазменной трубки будет совершена работа $W_p' = -(1/R)(\mathrm{d}p/\mathrm{d}r)\,\xi^2$. Если шаг меняется с радиусом, то смещение длинной трубки по радиусу приводит к значительному искажению силовых линий, и поэтому оно энергетически невыгодно. Наиболее выгодным является такое возмущение, когда смещенная трубка всюду располагается по возможности ближе к невозмущенным силовым линиям. Такое смещение имеет ограниченную длину L и оно приводит к возмущению энергии магнитного поля на единицу объема $\sim H'^2/8\pi \approx (\pi H^2/8L^2)\,\xi^2$. Отсюда получаем условие устойчивости

$$-\frac{2}{R}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} < \frac{\pi H^2}{4L^2}, \qquad (3.8)$$

отличающееся от (3.6) лишь видом левой части и отсутствием первого слагаемого в правой части, поскольку в данном случае за счет перетекания плазмы вдоль силовых линий смещение всегда можно выбрать несжимаемым.

Чтобы найти L, развернем две близкие магнитные поверхности G и F на плоскость, несколько растянув одну из них по азимуту, чтобы они наложились одна на другую (см. рис. 4). Если шаг l меняется с радиусом, то силовые линии на разных плоскостях в проекции перекрещиваются, т.е. составляют между собой некоторый угол $\delta\alpha$, который можно найти, дифференцируя соотношение $\mathrm{tg}\,\alpha=l/2\pi r = H_z/H_\theta$, т.е. $\delta\alpha=(\delta l/2\pi r)\cos^2\alpha=(H_\theta H_z/H^2)(\delta l/l) = -(H_\theta H_z/H^2)(\mu'/\mu)\,\xi$, где $\mu'=\mathrm{d}\mu/\mathrm{d}r$. Как нетрудно видеть, смещенная трубка ADB, минимально искажающая магнитное поле, имеет вид одного витка винтовой спирали с шагом $L=2\pi\xi/\delta\alpha$, откуда находим $L=2\pi H^2/H_z^2\,r\mu'$. Подставляя это выражение в (3.8), найдем условие конвективной устойчивости шнура с распределенным током:

$$-8\pi p' < \frac{H_z^2}{4} r\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^2. \qquad (3.9)$$

Это условие было получено Сайдемом [21]. Следует иметь в виду, что условие Сайдема представляет собой лишь необходимое условие устойчивости, им имеет смысл пользоваться только для плавных распределений поля и давления плазмы по радиусу. При наличии резких изменений давления или магнитного поля с радиусом выполнение условия Сайдема оказывается далеко не достаточным для устойчивости плазмы [22—24].

Перекрещенность силовых линий может быть создана и с помощью внешних обмоток с током, именно этот принцип стабилизации лежит в основе удержания плазмы в стеллараторе [25, 26].

Рис. 4 Искривление трубки с плазмой вследствие конвективной неустойчивости.

4. Конвекция плазмы низкой плотности

Перейдем теперь к рассмотрению конвекции, возникающей вследствие неустойчивости. Опять в качестве отправного пункта естественно выбрать такие условия, когда конвекция только-только начинается. Такая ситуация имеет место либо в случае слабо ионизованной плазмы, когда неустойчивость возникает при увеличении магнитного поля выше некоторого критического значения, либо в разреженной плазме, где параметром, определяющим переход к конвекции, является плотность заряженных частиц. Мы ограничимся здесь лишь вторым случаем, который может иметь место в ловушках типа Огра, заполняемых плазмой путем инжекции пучка быстрых ионов [27, 28].

Для простоты допустим, что электроны холодные, т.е. их температура много меньше средней

энергии ионов. Тогда скорость электронов поперек магнитного поля сводится только к электрическому дрейфу, и уравнение непрерывности для их плотности n_e имеет вид

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{c}{H}[\nabla\varphi, \nabla n_e]_z = 0, \qquad (4.1)$$

где φ — потенциал электрического поля. Мы воспользовались здесь цилиндрической системой координат, предполагая, что искривление силовых линий достаточно мало, и следовательно, $H \approx$ const.

В уравнении непрерывности для ионов следует учесть магнитный дрейф за счет выпуклости силовых линий:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} - \omega_0 \frac{\partial n}{\partial \theta} + \frac{c}{H}[\nabla\varphi, \nabla n_i]_z = 0, \qquad (4.2)$$

где $\omega_0 = T/MaR_0\Omega_H$ — угловая скорость магнитного дрейфа, $R = aR_0/r$ радиус кривизны силовых линий, R_0 — радиус кривизны периферийной силовой линии (см. рис. 3), a — радиус камеры, $\Omega_H = eH/Mc$. Что касается дрейфа ионов за счет силы инерции, то в случае $\Omega_0^2 \ll \Omega_H^2$, которым мы ограничимся в этом параграфе, им можно пренебречь.

К уравнениям (4.1), (4.2) следует добавить еще уравнение для электрического поля

$$\Delta\varphi = -4\pi e(n_i - n_e). \qquad (4.3)$$

Предположим, что ловушка настолько длинная, что зависимостью величин n, φ от z можно пренебречь. В равновесном состоянии $n_e = n_{e0}$, $n_i = n_{i0}$, $\varphi = \varphi_0$, причем

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\varphi_0}{dr}\right) = -4\pi e(n_{i0} - n_{e0}). \qquad (4.4)$$

Предполагая, что возмущение плотности и потенциала изменяется по закону $\exp(-i\omega t + im\theta)$, мы получим из уравнений (4.1)—(4.3) одно уравнение для возмущения потенциала φ':

$$\Delta\varphi' = -\frac{4\pi e^2}{M\Omega_H r}\left\{\frac{m}{\omega + m\omega_E}\frac{dn_{e0}}{dr} - \frac{m}{\omega + m\omega_0 + m\omega_E}\frac{dn_{i0}}{dr}\right\}\varphi', \qquad (4.5)$$

где $\omega_E = \omega_E(r) = -(c/rH)(d\varphi_0/dr)$ — угловая скорость электрического дрейфа.

Рассмотрим простейший случай, когда в равновесном состоянии плотности электронов равны и распределены по параболическому закону $n_{i0} = n_{e0} = N[1 - (r^2/a^2)]$, $\varphi_0 = 0$. Тогда решение уравнения (4.5) имеет вид функции Бесселя, а частота колебаний равна

$$\omega = -\frac{1}{2}m\omega_0 \pm m\sqrt{\frac{\omega_0^2}{4} - \frac{2\Omega_0^2\omega_0}{\Omega_H\alpha_{mn}^2}}, \qquad (4.6)$$

где α_{mn} — n-ый корень функции Бесселя J_m.

Отсюда видно, что неустойчивость возникает только при достаточно большой плотности, когда подкоренное выражение в (4.6) становится отрицательным. При этом неустойчивость возникает сначала на возмущении с максимальной поперечной длиной волны, т.е. при $m = 1$. Условие возникновения конвекции, таким образом, приближенно можно записать в виде $r_d^2 < aR_0$, что вполне соответствует условию (3.2). Аналогичный вид имеет это условие и для других распределений плотности $n_0(r)$. В частности, если n_0 круто спадает на расстоянии δ от стенки, то условие возникновения конвекции имеет вид:

$$r_d^2 < R_0\delta.$$

В реальных условиях ловушки с инжекцией пучка ионов картина развития колебаний может быть значительно сложнее, поскольку смещение ионного облака от оси симметрии может сильно повлиять на время жизни ионов по отношению к возврату на инжектор. По этой причине даже небольшое эксцентричное смещение облака может существенно изменить плотность ионов, и этот эффект может привести к усилению малых колебаний.

При не очень большой плотности ионов можно ожидать, что за счет различных нелинейных эффектов в ловушке установятся колебания с конечной амплитудой. Величиной, наиболее чувствительной к амплитуде колебаний, является, по-видимому, плотность электронов, поскольку время образования электронного облака за счет ионизации остаточного газа при хорошем вакууме значительно превосходит время накопления ионов. С другой стороны, и сама неустойчивость оказывается очень чувствительной к плотности электронов (при $n_{e0} = 0$, например, она вообще отсутствует).

Чтобы выяснить эффект, к которому приводит отсутствие компенсации пространственного заряда, обратимся к рассмотренному в 3.1 движению отдельной трубки с плазмой. При $n_e = n_i$ и $r_d^2 < ar$ такая трубка с ускорением движется точно по радиусу. Если $n_e \neq n_i$, то трубка обладает некоторым зарядом, и при движении поперек магнитного поля со скоростью $\mathbf{v}$ на нее будет действовать сила Лоренца $(e/c)(n_i - n_e)[\mathbf{v}, \mathbf{H}]$. Под действием этой силы ее движение станет криволинейным, так что ее траектория превратится в циклоиду. Если

$$\frac{|n_i - n_e|}{n} < \frac{\varrho}{r}\sqrt{\frac{\Omega_0^2}{\Omega_0^2 + \Omega_H^2}}, \qquad (4.7)$$

то высота этой циклоиды меньше r, и трубка никогда не попадет на стенку: в среднем она будет дрейфовать вдоль оси z, так что при этом сила Лоренца в точности компенсирует диамагнитное выталкивание.

Аналогичный эффект имеет место и при малых колебаниях неоднородной плазмы: при смещении заряженных трубок поперек магнитного поля на них действует сила Лоренца, которая возвращает их в исходное состояние. Качественно этот эффект можно выяснить на примере параболического распределения плотности. Если приближенно считать $\omega_E = $ const., то из (4.5) нетрудно получить дисперсионное уравнение и из него найти плотность электронов, при которой конвективная неустойчивость отсутствует. Она определяется соотношением

$$\frac{n_{e0}}{n_{i0}} = 1 + s \pm 2\sqrt{s}, \qquad (4.8)$$

где $s = \omega_0 \Omega_H \alpha_{mn}^2 / 2\,\Omega_0^2$. При $s \ll 1$ это условие можно приближенно записать в виде $\Delta n/n \approx (r_d/\lambda)\,(a/R_0)^{1/2}$, где $\lambda = a/\alpha_{mn}$ — длина волны возмущения (напомним, что $\Omega_0^2 \ll \Omega_H^2$).

Отсюда видно, что даже при довольно большой плотности ионов сравнительно небольшое нарушение квазинейтральности может привести к значительному снижению инкремента нарастания конвективных возмущений*. Поэтому можно ожидать, что в широком диапазоне изменения плотности ионов плазма в ловушке со стационарной инжекцией будет совершать колебания с конечной и, возможно, не очень большой амплитудой. Однако теоретическое определение этой амплитуды представляет большие трудности, поскольку для этого требуется детальный анализ образования и ухода из ловушки холодной плазмы.

Заметим еще, что всюду выше мы учитывали только магнитный дрейф. При наличии радиального электрического поля за счет вращения появляется центробежная сила, которая также может привести к неустойчивости. При $\Omega_0^2 < \Omega_H^2$ этот эффект можно учесть простым добавлением к ω_0 дрейфа ионов относительно электронов за счет центробежной силы.

5. Турбулентная конвекция плазмы в ловушке с магнитными пробками [29]

Если $\Omega_H/\Omega_0^2 < R_0\,(T/M)^{1/2}$, то неустойчивость может возникнуть на возмущении с любым масштабом, в частности, с минимально возможным, порядка среднего ларморовского радиуса ионов $\varrho = (T/M\Omega_H^2)^{1/2}$. В этом случае конвекция квазинейтральной плазмы принимает турбулентный характер.

Экспериментально турбулентная утечка частиц из ловушки с магнитными пробками была изучена в работе Иоффе, Соболева, Тельковского, Юшманова [30, 31]. В их установке горячая плазма с энергией ионов ~ 1 кэв и плотностью $\sim 10^9$ см$^{-3}$ создавалась путем ускорения ионов в радиальном электрическом поле, которое импульсно прикладывалось между стенками камеры и холодным плазменным шнуром, расположенным вдоль оси системы. Как показывает эксперимент, после приложения высокого напряжения ловушка заполняется горячей плазмой в течение 10—20 мксек. Можно думать, что заполнение происходит за счет центробежной неустойчивости плазменного шнура, вращающегося в скрещенных электрическом и магнитном полях: вращающаяся плазма «разбрызгивается» к периферии, и одновременно ионы набирают энергию.

После отключения высокого напряжения быстрое вращение плазмы прекращается, и наступает более спокойная стадия движения диамагнитной плазмы в магнитном поле, спадающем в радиальном направлении. Характерное время этого движения значительно больше, чем время пролета частиц между пробками, поэтому вдоль силовых линий успевает установиться стационарное распределение электронов и ионов.

Так как электроны в такой плазме остаются сравнительно холодными (их энергия ~ 10 эв), то температуру электронов можно считать равной нулю, и тогда из условия равновесия электронов следует, что потенциал φ вдоль каждой трубки с плазмой должен быть постоянным. При этом величина φ не может быть произвольной. С одной стороны, потенциал не может быть отрицательным, так как в противном случае избыточные электроны немедленно будут вытолкнуты на торцы, находящиеся под нулевым потенциалом. С другой стороны, и положительный потенциал не может быть очень большим, иначе из трубки начнут выходить ионы. Поскольку ионы, испытывающие отражение от пробок вблизи концов A и B трубки с плазмой (см. рис. 3), удерживаются от выброса на торцы за счет нарастания магнитного поля от величины H_s на краю трубки до его максимального значения H_m, то вытекание этих ионов начнется при потенциале порядка (T/e) $[(H_m/H_s) - 1]$, где T — «температура» ионов, т.е. две трети их средней энергии. Таким образом, φ изменяется в пределах

$$0 < \varphi < \frac{T}{e}\left(\frac{H_m}{H_s} - 1\right). \qquad (5.1)$$

Так как в стадии ускорения происходят значительные колебания электрического поля, то в создаваемой таким образом плазме не могут остаться ионы, испытывающие отражение очень близко от поверхности максимального поля H_m. Другими словами, в рассматриваемом нами случае $H_s \neq H_m$, и следовательно, ничто не препятствует развитию конвекции.

Вследствие неустойчивости любая трубка с более плотной плазмой будет выталкиваться на боковые стенки. При соприкосновении трубки со стенкой из нее начнут выходить и поглощаться стенкой ионы, находящиеся на расстоянии порядка среднего ларморовского радиуса ϱ. Вследствие потери ионов потенциал плазмы вблизи стенки упадет до нуля, а избыточные электроны по силовым линиям будут уходить на торцы. В результате, весь пристеночный слой толщины ϱ будет иметь нулевой потенциал, и следовательно, нормальная компонента электрического дрейфа $v_r = c\,[\mathbf{H}, \nabla\varphi]_r/H^2$ во всем пристеночном слое толщиной ϱ будет равна нулю. Это означает, что плазма не может сразу погибнуть на стенке: она растекается по стенке подобно обычной жидкости, и лишь по мере потерь частиц на стенке отдельные трубки будут выталкиваться внутрь ловушки, уступая свое место трубкам с более плотной плазмой.

В целом, вся картина приобретает характер, аналогичный тепловой конвекции в обычной не-

* В недавней работе Розенблюта, Краля и Ростокера 61 было показано, что подобного рода стабилизирующий эффект имеет место и в квазинейтральной плазме за счет конечности ларморовского радиуса ионов (прим. при корректуре).

сжимаемой жидкости: роль жидкости здесь играют силовые трубки магнитного поля, а роль температуры — давление плазмы. Поэтому мы можем воспользоваться аналогией с 2.2 и считать, что поток частиц на стенку определяется «сопротивлением» пристеночного слоя.

Как и при описании обычной конвекции, диффузионный поток плазмы на стенку q можно представить в виде $q=D_{\mathrm{T}}(\mathrm{d}n/\mathrm{d}x)$, где n — средняя плотность, x — расстояние от стенки, $D_{\mathrm{T}}=\langle xv'\rangle$ — коэффициент турбулентной диффузии. Для оценки пульсации скорости v' воспользуемся формулой (3.1), где под $r\equiv R_0$ следует понимать средний радиус кривизны около стенки, а под p' — пульсацию давления, равную Tn'. Кроме того, для простоты мы заменим n на его среднее значение N, так что $\Omega_0^2=4\pi e^2 N/M$. Тогда согласно (3.1) будем иметь

$$v'^2\sim v'x\sim[\Omega_0^2/(\Omega_0^2+\Omega_H^2)]\ (n'Tx/MNR_0).$$

С другой стороны, $n'\sim x\,\mathrm{d}n/\mathrm{d}x=qx/D_{\mathrm{T}}$. Отсюда получаем:

$$D_{\mathrm{T}}=A\left(\frac{\Omega_0^2}{\Omega_0^2+\Omega_H^2}\cdot\frac{Tq}{R_0MN}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{4}{3}},\qquad(5.2)$$

где A — численный множитель порядка единицы.

Вблизи от стенки поток $q=D_{\mathrm{T}}\,\mathrm{d}n/\mathrm{d}x$ можно считать постоянным. Отсюда находим распределение плотности вблизи стенки:

$$n=N-\frac{3q}{Ax^{1/3}}\left[\frac{\Omega_0^2}{\Omega_0^2+\Omega_H^2}\frac{Tq}{R_0MN}\right]^{-\frac{1}{3}}.\qquad(5.3)$$

Этим распределением можно пользоваться только при достаточно больших x: на расстоянии ларморовского радиуса ϱ от стенки оно теряет смысл. Это значит, что при $x=\varrho$ следует поставить граничное условие.

Пусть ε есть доля плазмы, теряемая трубкой при соприкосновении со стенкой, а n_{s} — средняя плотность (5.3) при $x=\varrho$. Пульсация плотности n', связанная с тем, что к стенке подходят и затем уходят обратно трубки с плазмой, является величиной порядка $\varepsilon n_{\mathrm{s}}/2$. Поток плазмы на стенку q по порядку величины равен $n'v'$, где $v'\sim D_{\mathrm{T}}/x$ — пульсация скорости. Таким образом, приближенно можно написать следующее граничное условие:

$$q=\frac{1}{2}\varepsilon n_{\mathrm{s}}\left(\frac{D_{\mathrm{T}}}{x}\right)_{x=\varrho}.\qquad(5.4)$$

Исключая из (5.3), (5.4) $n_{\mathrm{s}}=n\,(x=\varrho)$, находим связь между q и N, а затем время жизни плазмы τ:

$$\tau=\frac{\pi a^2N}{2\pi aq}=C\alpha\left(\frac{\Omega_H^2+\Omega_0^2}{\Omega_0^2}\cdot\frac{R_0M}{\varrho T}\right)^{\frac{1}{2}},\qquad(5.5)$$

где

$$C=\frac{1}{2}\left(\frac{2+3\varepsilon}{A\varepsilon}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Зависимость τ от ε довольно сильная, но к сожалению, теоретически вычислить величину ε очень трудно, поскольку она связана с такими трудно учитываемыми факторами, как например, шероховатость стенки, т.е. отклонение поверхности стенки от силовых линий. Поэтому мы будем считать ε константой порядка единицы. При $A=\varepsilon=1/2$ вычисленное по формуле (5.5) время жизни с точностью до двойки согласуется с экспериментально измеренными значениями τ для разных T и H. Однако экспериментально измеренная зависимость τ от T и H имеет гораздо более резко выраженный характер. Это расхождение показывает, что, по-видимому, не все использованные нами упрощения являются вполне оправданными. (Возможно, например, что величина ε увеличивается с уменьшением τ, т.е. с усилением интенсивности конвективных пульсаций).

В пользу рассмотренной здесь картины турбулентной конвекции свидетельствуют также зондовые измерения [30]. Они показывают, что токи на стеночные зонды хорошо коррелированы вдоль силовых линий, т.е. плазма действительно выходит на стенку целыми трубками. Кроме того, экспериментально измеренная зависимость τ от N [31] хорошо согласуется зависимостью $\tau\sim N^{-1/2}$, вытекающей из (5.5) при $\Omega_H^2<\Omega_0^2$.

6. Конвекция плазмы в поле прямого тока

При рассмотрении конвекции в ловушке мы предполагали, что радиус кривизны силовых линий R_0 много больше радиуса камеры. При этом условии расширением трубок с плазмой при движении к периферии практически можно было пренебречь. Здесь мы рассмотрим в некотором смысле другой предельный случай, когда давление плазмы существенно изменяется при движении трубок поперек магнитного поля.

Допустим, что на поверхности цилиндра радиуса a, внутри которого протекает ток, создающий азимутальное магнитное поле $H=H_0a/r$, поддерживается постоянная плотность плазмы n_0. Реально такая ситуация может быть осуществлена, например, при помощи термической ионизации паров цезия на этой поверхности. Радиус металлического кожуха, образующего внешнюю стенку камеры, обозначим через b. Длину системы вдоль z выберем настолько большой, чтобы торцевыми эффектами можно было пренебречь.

Плазма, образующаяся на поверхности внутреннего цилиндра, в силу своего диамагнетизма будет выталкиваться в направлении к внешней стенке. Так как на внешней металлической стенке, расположенной вдоль силовых линий, нормальная компонента скорости электрического дрейфа обращается в нуль, то плазма не может на ней сразу погибнуть, и следовательно, в такой ловушке возникнет сравнительно медленное конвекционное движение. При достаточно большом магнитном поле конвекция будет носить турбулентный характер, т.е. в плазме будут развиты пульсации самых различных масштабов. Естественно думать, что и в этом случае поток плазмы на стенку будет полностью определяться процессами в пристеночном слое, в котором движение плазмы поперек

магнитного поля затормаживается за счет стабилизирующего действия проводящей стенки.

Для количественного рассмотрения турбулентной конвекции воспользуемся опять аргументацией, аналогичной приведенной в 2.2. Поток q снова можно определить как $q=\langle n'v'\rangle$, где n', v' — пульсации плотности и скорости. Как и раньше пульсацию скорости можно найти по той работе, которая совершается трубкой при движении поперек магнитного поля: $(v')^2 \sim p'x/Mnr$, где x — расстояние от наружней стенки. Пульсацию давления p'. т.е. его избыток над средним значением, возникающий за счет перемещения трубки на расстояние $\lambda \sim x$, в сильно неоднородном магнитном поле можно представить в виде:

$$p' \sim x\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + \frac{\gamma p}{U}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\right), \tag{6.1}$$

где второе слагаемое учитывает уменьшение давления за счет адиабатического расширения плазмы.

В магнитном поле прямого тока $U=-2\pi r^2/H_0 a$, и выражение (6.1) принимает вид $p' \sim x\,[(\mathrm{d}p/\mathrm{d}x) - (2\gamma p/r)]$. Аналогичным образом можно представить и пульсацию плотности. Поскольку в магнитном поле коэффициент ионной теплопроводности намного больше коэффициента диффузии, то ради простоты мы приближенно положим $\gamma=1$, $p'/n'=T=\mathrm{const}$. Тогда для потока q получим:

$$q = A\sqrt{\frac{T}{Mrn}}\left(\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x} - \frac{2n}{r}\right)^{\frac{3}{2}} x^2, \tag{6.2}$$

где $A=\mathrm{const}\sim 1$.

Вдали от стенки величиной q/x^2 можно пренебречь, и из (6.2) получаем $n=n_0\,(a/r)^2$. т.е. распределение плотности соответствует нейтральному состоянию между устойчивым и неустойчивым [см. (3.5)]. Наоборот, вблизи стенки можно пренебречь величиной $2n/r$ по сравнению с $\mathrm{d}n/\mathrm{d}x$ и, кроме того, можно считать $q=\mathrm{const.}$, $r=\mathrm{const.}=b$. В этом приближении из (6.2) получаем:

$$n^{\frac{2}{3}} = n_0^{\frac{2}{3}}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{4}{3}} - \frac{2q^{2/3}}{A}\left(\frac{Mb}{T}\right)^{\frac{1}{3}} x^{-\frac{1}{3}}$$

Таким образом, полное распределение плотности по радиусу можно аппроксимировать выражением

$$n^{\frac{2}{3}} = n_0^{\frac{2}{3}}\left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{4}{3}} - \frac{2q^{2/3}}{A}\left(\frac{Mb}{T}\right)^{\frac{1}{3}} x^{-\frac{1}{3}} \tag{6.3}$$

При очень малых x это распределение теряет смысл, поскольку при его выводе не была учтена обычная диффузия. При учете обычной диффузии распределение плотности по радиусу должно было бы гладко перейти в линейную зависимость $n=qx/D$ в ламинарном подслое. Приближенную сшивку функций (6.3) и $n=qx/D$ получим, приравнивая n и $\mathrm{d}n/\mathrm{d}x$ в некоторой точке x_0, которая сама определяется этим условиями. Отсюда находим:

$$x_0 = \frac{1}{A}\left(\frac{MbD^2}{T}\right)^{\frac{1}{3}}, \tag{6.4}$$

$$q = \frac{A}{3\sqrt{3}}\, n_0\left(\frac{a}{b}\right)^2\left(\frac{DT}{Mb}\right)^{\frac{1}{3}}, \tag{6.5}$$

где $D=(c^2/4\pi\sigma)\beta$ — коэффициент диффузии плазмы поперек магнитного поля, σ — ее проводимость, $\beta=8\pi p/H^2$.

Соотношения (6.4), (6.5) имеют очень ограниченную область применимости хотя бы потому, что в условиях, когда x_0 становится меньше ларморовского радиуса ϱ течение плазмы через ламинарный подслой уже нельзя считать диффузионным. В действительности они могут оказаться неправильными еще раньше. Дело в том, что практически невозможно расположить внешнюю стенку точно по силовым линиям, а уже небольшое их несовпадение может привести к существенному изменению всех процессов в пограничном слое.

Будем характеризовать «шероховатость» поверхности величинами δ и l, где δ — амплитуда отклонения силовой линии от поверхности, а l — длина «волны», с которой силовая линия колеблется около поверхности. При малом δ/l и $x_0<\delta$ можно, по-видимому, приближенно положить $q=(\delta/l)\,(T/M)^{1/2}n$ $(x=\delta)$. Такое соотношение отвечает предположению, что стабилизирующее действие стенки сводится к ограничению масштаба пульсаций до величины $\sim\delta$, и что плазма, попадающая во «впадину» с тепловой скоростью растекается вдоль силовых линий на «выпуклости» стенки. Подставляя это соотношение в (6.3) получим:

$$q = \sqrt{\frac{T}{M}}\, n_0\left(\frac{a}{b}\right)^2 \frac{\delta}{l + (2/A)\,(b\delta l)^{1/3}}.$$

Таким образом, в этих предположениях поток q может достигать весьма больших значений. Реальная картина может оказаться еще сложнее, и для полного ее выяснения требуются экспериментальные исследования. Но независимо, или почти независимо от действительной величины q распределение плазмы по радиусу оказывается близким к нейтральному. Плотность плазмы очень быстро спадает с радиусом, и поэтому поток q должен быстро убывать при увеличении радиуса внешней стенки b.

7. Турбулентный разряд в продольном магнитном поле [32]

В рассмотренных выше примерах магнитное поле считалось заданным, оно определялось внешними токами. В сильноточном разряде само поле определяется распределением тока по плазме, и по этой причине картина конвекции значительно усложняется.

Хорошо проводящий шнур с плавно распределенным током устойчив только в том случае, если выполнено условие Сайдема (3.9). В сильном продольном поле, когда $H_\theta/H_z \ll 1$ и $\beta=8\pi p/H^2 \ll 1$, это условие легко выполняется за счет неравномерного распределения тока, обусловленного неоднородной проводимостью шнура. Как будет

показано в следующей главе, при этом на первый план выступает токовая конвекция, связанная с конечной проводимостью плазмы. Здесь же мы ограничимся только случаем умеренного продольного поля, $H_0/H_z \sim 1$ (режим Зеты), когда основным механизмом турбулентного охлаждения плазмы, можно думать, должна быть диамагнитная конвекция.

Так как в правой части неравенства (3.9) имеется малый множитель 1/4, то при $H_0/H_z \sim 1$ условие Сайдема оказывается нарушенным уже при сравнительно небольшом градиенте давления, и в шнуре развивается конвекция, состоящая в выбросе более горячих трубок на стенку и возвращении охлажденных трубок внутрь шнура. Наша задача состоит в том, чтобы дать приближенное описание этого процесса.

Начнем с простых оценок. Разложим давление плазмы на два слагаемых $p = p_0 + p_1$, где p_0 — давление, которое еще удерживается устойчиво, т.е. при фиксированном распределении магнитного поля оно удовлетворяет условию Сайдема, а p_1 — избыток давления над p_0. Именно этот избыток и приводит к неустойчивости.

Пульсацию давления в турбулентном шнуре можно представить в виде $p' = l\,(\mathrm{d}p/\mathrm{d}r) \sim (l/a)\,p$, где a — радиус камеры, l — длина перемешивания. Для простоты мы будем считать длину перемешивания постоянной по радиусу и пропорциональной a. Такое допущение можно оправдать тем, что в реальных условиях разряд обычно бывает окружен лайнером, расположенным на некотором расстоянии от проводящего кожуха. Поэтому кожух не оказывает стабилизирующего действия на мелкомасштабные пульсации, и l не изменяется существенно при приближении к стенке. По аналогии со свободной турбулентностью жидкости в затопленных струях можно ожидать $l/a \sim 10^{-1}$.

Поток энергии на стенку за счет турбулентного переноса можно представить как $q = \langle p'v' \rangle$, где пульсацию скорости v' опять можно оценить из закона сохранения энергии $v' \sim (l/a)\,(p_1/Mn)^{1/2}$, где n — средняя плотность ионов в разряде. Таким образом, приближенно $q = (l/a)^2\, v_s\, p\, (p_1/p)^{1/2}$, где $v_s = (p/Mn)^{1/2}$ — скорость звука, т.е. тепловая скорость ионов при температуре, равной сумме температур ионов и электронов.

Поток энергии на стенки возникает за счет выделения джоулева тепла в объеме, и следовательно, в стационарном случае, если ток распределен более или менее равномерно, $2\pi aq \approx \delta \pi a^2 j^2/\sigma \approx \delta\,(c^2 H_0^2/4\pi\sigma)$, где множитель $\delta < 1$ учитывает, что значительная доля энергии может уноситься излучением. Отсюда получаем:

$$\frac{8\pi p}{H_0^2}\sqrt{\frac{p_1}{p}} \approx \frac{\delta}{s^2}\cdot\frac{c^2}{\pi\sigma v_s a}, \tag{7.1}$$

где $s = l/a$ есть численная константа порядка 10^{-1}.

Таким образом, как и следовало ожидать, избыток давления над устойчивым определяется в конце концов отношением инерционного времени $t_i = a/v_s$ к скиновому $t_s = \pi\sigma a^2/c^2$. Мы рассмотрим здесь случай хорошей проводимости, когда это отношение настолько мало, что параметр $\varkappa = (\delta/s^2)\,(c^2/\pi\sigma v_s a) \ll 1$. При этом $p_1 \ll p_0$, и следовательно, распределение давления плазмы по радиусу определяется условием Сайдема:

$$8\pi\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = -\frac{H_z^2}{4}\,r\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^2. \tag{7.2}$$

С другой стороны, давление связано с распределением полей условием равновесия

$$\nabla p = \frac{1}{c}[\mathbf{j}\mathbf{H}]. \tag{7.3}$$

Для полного определение давления и магнитного поля следует привлечь еще закон Ома, который при изотопной проводимости имеет вид:

$$\frac{\mathbf{j}}{\sigma} = \frac{1}{c}[\mathbf{v}\mathbf{H}] + \mathbf{E} - \frac{1}{ne}\nabla p_i\,. \tag{7.4}$$

где p_i = давление ионов.

Так как уравнение (7.2) содержит малый параметр 1/4, то эту систему уравнений можно решать методом последовательных приближений, полагая в нулевом приближении $p = 0$. Тогда из (7.3) получим $\mathbf{j} = \alpha\mathbf{H}$, т.е. магнитное поле в этом приближении является бессиловым. Если понимать под $\mathbf{j}$ и $\mathbf{H}$ средние значения плотности тока и магнитного поля, то в уравнении (7.3), строго говоря, нужно было бы учесть давление $(H')^2/8\pi$ пульсаций магнитного поля H' и среднее значение от пульсаций сил инерции. Но поскольку при $\varkappa \ll 1$ конвекция является сравнительно медленной, и кроме того, при конвективных перестановках силовых трубок с плазмой магнитное поле искажается крайне незначительно, то пренебрегая градиентом давления, мы должны пренебречь и этими членами. Кроме того, мы сделаем еще одно упрощение, а именно, будем считать, что в уравнении (7.4) $\mathbf{H}$ представляет собой среднее поле. Так как при этом уравнение (7.4) становится линейным относительно пульсирующих величин, то уравнение для средних величин будет иметь точно такой же вид (7.4), лишь под $\mathbf{j}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{v}$ и $\mathbf{E}$ следует понимать их средние значения. Подставляя в уравнение (7.4) $\mathbf{j} = \alpha\mathbf{H}$ и умножая его затем на $\mathbf{H}$, мы найдем α и получим:

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \frac{\sigma\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{H}}{H^2}\cdot\mathbf{H} \tag{7.5}$$

Соотношение (7.5) совместно с уравнениями $\mathrm{div}\,\mathbf{j} = \mathrm{div}\,\mathbf{H} = 0$ позволяет, в принципе, найти распределение полей в разряде любой геометрической формы. Такой приближенный метод решения задачи о распределении полей мы будем называть приближением продольной проводимости, поскольку ток при этом считается направленным вдоль $\mathbf{H}$, а продольная компонента закона Ома используется в обычной форме.

Для прямого цилиндрически симметричного шнура при $\sigma = \mathrm{const}$. уравнение (7.5) удобно привести к безразмерному виду, полагая $H_\theta = H_0 u(x)$, $H_z = H_0 v(x)$, $x = 4\pi\sigma E_0 r/cH_0$, где H_0 — величина продольного магнитного поля на оси шнура,

E_0 — продольное электрическое поле. При этом из (7.5) получаем:

$$\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(xu) = \frac{v^2}{u^2+v^2},$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\frac{uv}{u^2+v^2}. \qquad (7.6)$$

Решение этих уравнений представлено графически на рис. 5. На этом же рисунке приведено распределение давления плазмы, вычисленное по формуле (7.2). Как мы видим, при данном распределении магнитного поля давление устойчиво удерживаемой плазмы не превосходит 4% от давления магнитного поля, что свидетельствует о хорошей точности приближения продольной проводимости.

То обстоятельство, что в разряде с умеренным продольным полем распределение полей оказывается близким к бессиловому, было обнаружено уже в первых опытах на Зете [33], а затем подтверждено более тщательными измерениями на Зете и ряде аналогичных установок [34—36]. В принципе, это можно было бы объяснить тем, что вся энергия, вводимая в плазму, уносится излучением на примесях [37]. При этом давление плазмы также было бы мало по сравнению с давлением магнитного поля, ток поперек магнитного поля практически обращался бы в нуль, и вследствие гажения стенок в шнуре возник бы непрерывный поток плазмы к оси разряда со скоростью электрического дрейфа, как это следует из поперечной компоненты закона Ома (7.4).

Но такое объяснение находится в противоречии с экспериментально наблюдаемым переносом энергии на стенки самой плазмой, испытывающей сильные колебания. Можно сказать, что наряду со средним движением плазмы внутрь разряда, которое сжимает к оси продольное магнитное поле, из шнура «выпячиваются» отдельные силовые трубки, вдоль которых как по каналам горячая плазма выносится на стенки. Таким образом, в турбулентной плазме поток вещества $\mathbf{j}_n = n\mathbf{v}_0 = n\mathbf{v} + \langle n'\mathbf{v}'\rangle$ не связан непосредственно со средней скоростью $\mathbf{v}$, характеризующей перенос силовых линий, а определяется условиями адсорбции и газоотделения стенок. Другими словами, средняя скорость $\mathbf{v}$ в закона Ома (7.4) не равна гидродинамической скорости центра масс $\mathbf{v}_0 = \mathbf{j}_n/n$.

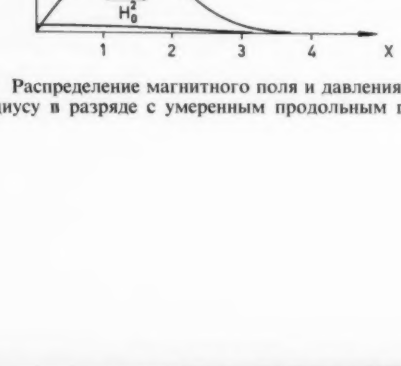


Рис. 5 Распределение магнитного поля и давления плазмы по радиусу в разряде с умеренным продольным полем.

Приведенное на рис. 5 распределение магнитного поля очень хорошо согласуется с экспериментально измеренным. Оно характеризуется единственным параметром $y = 4\pi\sigma E_0 a/cH_0$, представляющим собой безразмерный радиус кожуха. Увеличение y соответствует перемещению положения кожуха на рис. 5 в сторону больших x, т.е. концентрации тока к оси разряда. Согласно рис. 5 плотность тока убывает с удалением от оси разряда, так что основная часть тока (~85%) протекает в области $x < 2$. Это означает, что при $y \gtrsim 2$ токовый шнур практически отрывается от стенок, и его радиус перестает зависеть от радиуса камеры a. Вместо параметра y удобно ввести другой параметр $\theta = 4\pi Ia/\Phi c$, который выражается непосредственно через измеряемые на опыте величины — полный ток I и продольный магнитный поток Φ, заключенный внутри шнура с током. Оказывается, что с точностью до 20% $\theta = y$.

Таким образом, зная только полный ток I и продольный магнитный поток Φ, можно определить безразмерный радиус кожуха y и поле на оси разряда:

$$y \approx \theta = \frac{4\pi Ia}{\Phi c}, \quad H_0 = \frac{2I}{cau(y)}, \qquad (7.7)$$

а следовательно, и полное распределение полей.

Если положить $\Phi = \Phi_0 = \pi a^2 H_{z0}$, где H_{z0} — продольное магнитное поле перед началом разряда, то такой расчет приводит к хорошему согласию с данными экспериментальных измерений, но только для значений параметра $\theta < 3$. При дальнейшем же увеличении тока и параметра $\theta_0 = 4\pi Ia/\Phi_0 c$ величина $\theta = 4\pi Ia/\Phi c$ остается практически постоянной, так что магнитный поток внутри шнура Φ линейно возрастает с током. Про этом снаружи от шнура появляется продольное магнитное поле в обратном направлении. Это обстоятельство было отмечено в работе Лиза и Разбриджа [34], в которой было произведено сопоставление экспериментальных данных о распределении магнитного поля по радиусу с бессиловой моделью. Качественное обсуждение вопроса о замораживании параметра θ на значении $\theta \approx 3$ будет дано в § 10.

Бессиловой шнур с током может существовать только при наличии продольного поля. Поэтому возникает интересный вопрос, что будет при уменьшении продольного магнитного поля. Детальное исследование этого вопроса было проведено в работе Бабичева, Карчевского, Муромкина, Сокольского [36]. В их установке имелась возможность изменения магнитного потока внутри разряда при почти постоянном токе. Как показывают их измерения, шнур с током очень неохотно изменяет продольное магнитное поле: при уменьшении магнитного потока в шнуре продольное магнитное поле на оси разряда некоторое время сохраняет свое значение, а затем резко меняет знак.

В этой же работе было убедительно показано, что разряд с умеренным продольным полем является квазистационарным: распределение магнитного поля в таком шнуре полностью определяется

полным током и продольным магнитным потоком и не зависит от того, как изменяются эти величины со временем.

Прежде чем перейти к обсуждению других особенностей разряда с умеренным продольным полем, мы рассмотрим вопрос о винтовой неустойчивости шнура с током.

8. Винтовая неустойчивость

Неустойчивость шнура с током в продольном магнитном поле по отношению к извиванию явилась объектом исследования самых первых работ по гидромагнитной устойчивости плазмы [38—41]. В этих работах были изучены условия устойчивости такого шнура по отношению к малым возмущениям.

Чтобы выяснить физическую природу винтовой неустойчивости, мы рассмотрим сначала следующий идеализированный пример. Допустим, что тонкий идеально проводящий шнур радиуса a с текущим по его поверхности продольным током I_0 помещен в однородное магнитное поле H_0 (см.

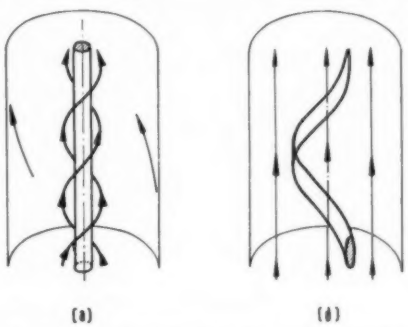


Рис. 6 Извивание проводника с током в продольном магнитном поле.

рис. 6а). Мы предположим, что проводящий шнур образован несжимаемой жидкостью и что магнитное поле внутри него отсутствует. Кроме того, будем считать, что шнур с током окружен идеально проводящим кожухом радиуса $b \gg a$.

Поскольку магнитное поле по абсолютной величине уменьшается при удалении от границы шнура, то такой шнур является, в частности, конвективно неустойчивым: малое возмущение его поверхности, состоящее в ее рифлении вдоль силовых линий, будет быстро нарастать во времени. Но мы пока отвлечемся от малых возмущений и рассмотрим сразу сильное искривление шнура, состоящее в извивании его в винтовую линию с шагом l. Обозначим через r амплитуду этого искривления. Так как при винтовом искривлении ток I перестает быть направленным по z, и у него появляется азимутальная компонента $I_\theta = 2\pi rI/l$, то на единицу длины шнура в радиальном направлении будет действовать сила

$$F = \frac{1}{c}\,[\mathbf{I}\mathbf{H}]_r = \frac{2\pi r}{cl}\,I H_0. \qquad (8.1)$$

Если шнур извивается по винту невозмущенных силовых линий то эта сила будет направлена наружу, и амплитуда искривления будет нарастать во времени.

Одновременно с этим будет уменьшается и сила тока, поскольку при движении шнура в продольном магнитном поле в нем будет наводиться ЭДС, направленная против тока. Ток I можно найти из условия сохранения магнитного потока, охватываемого проводником. Представим себе, что рассматриваемая нами система замкнута в тор с очень большой длиной обхода L_0. Тогда в исходном состоянии проводник с током будет охватывать поток $\Phi = (2I_0L_0/c)\ln(b/a.)$ При искривлении шнура наряду с потоком азимутального поля, который с логарифмической точностью можно считать равным $(2\,I\,L_0/c)\ln(b/a)$, он будет охватывать также продольный поток $\pi r^2 H_0 L_0/l$. Из условия $\Phi = \text{const}$. получаем:

$$\frac{I}{I_0} = 1 - \frac{\pi r^2 H_0 c}{2l\,I_0 \ln(b/a)}\,. \qquad (8.2)$$

Зная выражение для силы (8.1), можно подсчитать совершаемую ей работу, а следовательно, и потенциальную энергию W проводника с током в продольном магнитном поле, рассчитанную на единицу длины:

$$W = -\int_0^r F\,\mathrm{d}r = \frac{\pi I_0 H_0}{cl}\left\{-r^2 + \frac{\pi H_0 c}{4l\,I_0 \ln(b/a)}\cdot r^4\right\}. \qquad (8.3)$$

Качественно зависимость W от r представлена на рис. 7 сплошной линией. Как мы видим, потенциальная энергия имеет минимум при

$$r = r_0 = \sqrt{\frac{2l\,I_0}{\pi H_0 c}\ln\frac{b}{a}} \qquad (8.4)$$

и равна в этой точке $W = W_0 = -(I^2_0/c^2)\ln(b/a)$, т.е. взятой с обратным знаком полной энергии азимутального магнитного поля.

Как видно из (8.2), при $r = r_0$ ток I обращается в нуль. Таким образом, у жидкого проводника с током наряду с исходным равновесным состоянием есть второе, в виде винтовой линии радиуса r_0. Во втором равновесном состоянии ток обращается в нуль, азимутальное магнитное поле отсутствует, и следовательно, энергия поля принимает минимально возможное значение. Строго говоря, это состояние не является вполне равновесным: силовые линии продольного поля будут сплющивать жидкий проводник и превратят его сначала в спиральную ленточку (рис. 6б), а затем в тонкостенную цилиндрическую трубку того же радиуса r_0. В случае прямого шнура это конечное состояние является, очевидно, нейтрально устойчивым по отношению к малым колебаниям, так как магнитное поле всюду однородно. При тороидальной геометрии равновесие без продольного тока невозможно, и поэтому жидкость будет двигаться к наружной стенке кожуха, пока не уля-

жется там в равновесном состоянии. Практически этот переход будет сопровождаться сильными колебаниями, поскольку вся энергия азимутального магнитного поля перейдет сначала в кинетическую и только по прошествии некоторого промежутка времени она диссипирует и превратится в тепловую.

Интересно отметить, что раз исчезнув, ток в винтовом шнуре не появляется даже при наложении внешнего электрического поля E. Если E направлено в ту же сторону, что и начальный ток I_0, то радиус винтовой спирали будет расти со временем, так что возникающая вследствие этого движения ЭДС в точности скомпенсирует E, т.е. $L_0 E = 2\pi r \dot{r} H_0 L_0/cl$, откуда

$$\dot{r} = \frac{clE}{2\pi r H_0}. \tag{8.5}$$

Мы рассмотрели возмущение с $m=1$, превращающее шнур в однозаходную спираль. Но точно к такому же эффекту исчезновения тока приводят и возмущения с $m>1$. При этом шнур разбивается на m винтовых нитей, с радиусом r_0 в $\sqrt{m}$ раз меньшим, чем (8.4).

Допустим теперь, что внутри шнура имеется вмороженное магнитное поле той же величины, что и снаружи. И в этом случае винтовой шнур отвечает более устойчивому состоянию. Однако, при этом ток уже не обращается в нуль: вмороженное поле внутри искривленного шнура дает некоторую силу натяжения, которая может быть уравновешена только силой (8.1).

Если ток распределен равномерно по сечению шнура, то шаг силовых линий всюду одинаков, и нетрудно представить себе расщепление шнура на m отдельных нитей. Но поскольку по ним течет некоторый ток, то они будут притягиваться друг к другу и сольются в один винтовой шнур.

Если же плотность тока не постоянна по радиусу, и шаг силовых линий меняется с радиусом, то амплитуда возмущений с $m>1$ будет ограничена за счет перекрещенности силовых линий, а при достаточно большом продольном поле шнур вообще становится устойчивым по отношению к таким возмущениям.

Итак, винтовая неустойчивость является следствием натяжения силовых линий, стремящихся превратиться в прямые. Так как этому стремлению препятствует идеальная проводимость шнура, то сам шнур становится винтовым. Можно сказать, что шнур с током в продольном магнитном поле все время находится под угрозой извивания. Однако такой переход не всегда может быть реализован. Дело в том, что потенциальная энергия (8.3) получена нами только для возмущений с достаточно большой амплитудой. Исследование [39—41] показывает, что при малом искривлении потенциальная энергия имеет барьер, как показано пунктирной линей на рис. 7. В случае сильного продольного поля, $H_z \gg H_\theta$, такой барьер существует для возмущений с шагом l, меньшим шага силовых линий $\pi a^2 H_z c/I_0 = 2\pi a H_z/H_\theta$, где $H_\theta = 2I_0/ca$ — азимутальное магнитное поле на границе шнура. Поэтому шнур конечной длины L_0 (скажем, тороидальный) оказывается устойчивым по отношению к извиванию, если выполнено условие

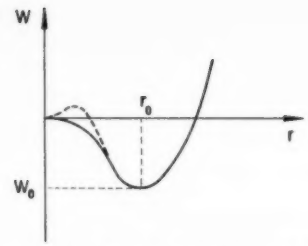


Рис. 7 Потенциальная энергия проводника с током в продольном магнитном поле.

$$\frac{H_\theta}{H_z} < \frac{2\pi a}{L_0}. \tag{8.6}$$

Это условие было получено независимо Шафрановым и Крускалом. Если условие (8.6) нарушается, то тонкий шнур вследствие неустойчивости извивается в винтовую линию с шагом $l \approx \pi a^2 c H_0/I_0$, причем радиус такой спирали согласно (8.4) оказывается порядка a: $r_0 \approx a\sqrt{2\ln(b/a)}$. При уменьшении радиуса проводящего кожуха амплитуда винтового искривления вследствие стабилизирующего действия стенок уменьшается, и шнур вообще может стать устойчивым. Например, бессиловой скинированный шнур, в котором ток течет по поверхности и продольное поле снаружи от шнура отсутствует, оказывается устойчивым по отношению к малым возмущениям при $b<5a$ [39].

9. Винтовой разряд

Вернемся опять к разряду с умеренным продольным полем. Как мы уже отмечали, при возрастании продольного тока безразмерный радиус кожуха $y = 4\pi\sigma E_0 a/c H_0$ увеличивается, т.е. радиус шнура уменьшается. А так как тонкий шнур неустойчив по отношению к извиванию, то естественно возникает мысль, что бессиловой разряд должен стать винтовым, если y превышает некоторое критическое значение y_c. Численное решение задачи об устойчивости такого бессилового шнура [32] показывает*, что извивание начинается приблизительно при $y \approx 3$, а длина волны возмущения вдоль оси z оказывается порядка шага невозмущенных силовых линий, а именно, безразмерное волновое число $k \approx 0{,}5$, т.е. $k y_c = 2\pi y_c/\lambda \approx 1{,}5$.

Если продольное электрическое поле E_0 не намного превосходит критическое значение $E_c = cH_0 y_c/4\pi\sigma a$, то нарастание амплитуды винтового извивания довольно быстро прекратится за счет нелинейных эффектов, и установившуюся амплитуду можно найти по теории возмущений, учитывая только квадратичные члены (квазилинейное приближение). Как показывает расчет [32], при увеличении продольного электрического поля выше

* Аналогичный расчет был проведен в работе [62].

критического значения амплитуда извивания A растет пропорционально $[(E_0/E_c)-1]^{1/2}$, причем даже при довольно большом превышении E_0 над критическим значением E_c амплитуда извивания оказывается все еще малой. Тем не менее, такое извивание оказывает заметное влияние на распределение средних полей. При малой амплитуде винтового искривления среднее поле опять оказывается бессиловым и близко соответствует профилю рис. 5 для цилиндрически симметричного шнура. Это распределение снова можно задать единственным параметром $\eta=4\pi al/\Phi c$. Оказывается, что при $E_0>E_c$ параметр θ не только перестает возрастать с E_0, но начинает даже немного уменьшаться.

Таким образом, согласно расчетам в квазилинейном приближении при увеличении E_0 выше критического значения ток в шнуре должен практически замораживаться на уровне критического $I_c=c\Phi\eta_c/4\pi a$, что можно интерпретировать как результат уменьшения эффективной проводимости шнура за счет его извивания (напомним, что проводимость поперек магнитного поля равна нулю). Следовательно, в приближении продольной проводимости увеличение $E_0>E_c$ должно просто увеличивать амплитуду винтового искривления при постоянном полном токе I.

Как показывает анализ, проведенный в работе [34], в эксперименте действительно наблюдается «замораживание» параметра θ на значении $\theta\approx 3$, так что при дальнейшем увеличении E_0 радиус шнура остается практически постоянным. Однако при этом ток I продолжает возрастать за счет увеличения магнитного потока внутри шнура и появления снаружи от шнура обратного потока.

Винтовой разряд с большой амплитудой извивания наблюдался Сойером и др. [42] на установке Колумбус, разрядная камера которой представляла собой прямую металлическую трубу радиуса $a=8$ см. При начальном магнитном поле $H_z=100$ гаусс и токе $I=10$ ка, что соответствует значению параметра $\theta_0=5$, наблюдалось извивание токового шнура с шагом $\lambda\approx 2a$, т.е. $ky\approx 3$.

Обнаруженное этими авторами сравнительно медленное вращение винтового шнура побудило их сделать предположение, что извивание разряда представляет собой бегущую альфвеновскую волну. Однако эта гипотеза оказалась ошибочной, что видно из приведенных в этой же работе оценок, показывающих, что вращение шнура оказывается практически безинерционным. Кроме того, как это было отмечено в заметке [43], альфвеновская волна при той низкой проводимости, какую имела плазма в установке Колумбус, затухла бы за один период колебаний. Следовательно, винтовой разряд в Колумбусе является квазистационарным, а его вращение связано с медленными диффузионными процессами [44]. Как мы видим, довольно большое числовое значение параметра η_0 как раз соответствует наличию заметного извивания шнура, а длина волны оказывается того же порядка, что и полученная из рассмотрения устойчивости.

Винтовое извивание шнура с током наблюдалось также на тороидальных установках [45, 46]. Наиболее подробно это явление было исследовано в работе [46].

Однако, винтовое искривление шнура с током, наблюдавшееся на установке МАРК IV [46], не вполне соответствует рассмотренной здесь теоретической картине. Дело в том, что в работе [46] винтовое извивание наблюдалось и при сравнительно малых значениях θ ($\theta<2$). Поскольку степень ионизации газа в этой установке была сравнительно невелика (несколько процентов) и проводимость сильно менялась по радиусу, то можно думать, что в извивание шнура значительный вклад давала также токово-конвентивная неустойчивость (см. §§ 11, 12).

10. Турбулентная диффузия магнитного поля

10.1. Перемешивание полей

В §§ 7,9 мы находили распределение магнитного поля в пространстве в приближении продольной проводимости, т.е. мы пользовались законом Ома в упрощенной форме. В настоящем параграфе мы откажемся от этого приближения и постараемся выяснить, к каким возможным эффектам может привести учет отброшенных нами ранее квадратичных членов в законе Ома.

Предположим опять, что проводимость $\sigma=\text{const}$. Тогда единственным квадратичным членом в законе Ома (7.4) будет $[\mathbf{v}'\mathbf{H}']/c$, где $\mathbf{v}'$ — пульсация скорости, $\mathbf{H}'$ — пульсация магнитного поля. К каким последствиям приводит наличие этого члена можно качественно выяснить, обращаясь к рис. 4. Как мы уже указывали ранее, при конвективных перестановках трубки с плазмой смещаются таким образом, чтобы по возможности меньше возмущать магнитное поле. Тем не менее, возмущение магнитного поля все же происходит. А именно, смещенная трубка CDE немного не совпадает по направлению с невозмущенной силовой линией в точке D: натяжение «вмороженных» в эту трубку силовых линий приводит к тому, что ее наклон к оси z является некоторым средним между ее первоначальным наклоном и наклоном невозмущенных силовых линий в точке D.

Вследствие этого при турбулентной конвекции плазмы возникает «перемешивание» магнитного поля: смещенные трубки переносят в данную точку силовые линии из соседних точек и стремятся, таким образом, выравнить шаг силовых линий по радиусу, т.е. привести к распределению поля с $\mu=\text{const}$. С учетом этого процесса закон Ома в пренебрежении градиентом ионного давления можно приближенно записать в виде:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{4\pi\sigma\mathbf{H}}{H^2}\left\{\mathbf{E}\cdot\mathbf{H}-\frac{D_{\text{TH}}}{H}\left[H_z r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{H_\theta}{r}\right)-H_\theta\frac{\partial H_z}{\partial r}\right]\right\} \tag{10.1}$$

где $D_{\text{TH}}=\langle lv'\rangle$ — коэффициент турбулентной диффузии магнитного поля. Второе слагаемое в фи-

гурных скобках (10.1), возникающее в результате усреднения $[\mathbf{v}'\mathbf{H}']/c$, учитывает количественно эффект выравнивания шага силовых линий по радиусу в результате конвекционного движения плазмы. Его вид выбран из тех соображений, что оно должно быть линейным относительно производных от компонент поля по радиусу и исчезать при $\mu = \text{const}$.

Эффект аномально быстрой диффузии магнитного поля по радиусу в разряде с умеренным продольным полем был обнаружен на установке Зета [34]. Результаты более подробного исследования этого явления приведены в недавно опубликованной работе Лиза и Разбриджа [47]*. Эти авторы показали, что время установления равномерного распределения тока по радиусу (при $\theta < 1$) оказывается значительно меньше скинового при начальном давлении газа меньше 20 μ. При увеличении давления газа выше этой величины время установления стационарного распределения поля становится порядка скинового t_s, но все же в 2—3 раза меньше t_s.

В принципе, задачу о турбулентном выравнивании плотности тока по радиусу можно было бы решить с помощью уравнений (10.1),

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \mathbf{E} \tag{10.2}$$

и уравнения теплового баланса с учетом турбулентной диффузии. Но поскольку в тепловом балансе существенную роль играет потеря энергии вследствие излучения примесей, то количественное решение этой задачи наталкивается на большие трудности. Поэтому мы ограничимся здесь лишь качественным обсуждением вопроса.

Допустим, что $\theta < 1$, и следовательно, можно считать $H_\theta \ll H_z \approx \text{const}$. Тогда из (10.1), (10.2) получим:

$$\frac{\partial H_\theta}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_\theta) \right] + D_{\text{TH}} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{H_\theta}{r} \right) \right]. \tag{10.3}$$

Отсюда получаем: $1/\tau \approx (1/t_s) + (1/\tau_{\text{T}})$, где τ — время выравнивания плотности тока по радиусу, t_s — скиновое время, $\tau_{\text{T}} \sim D_{\text{TH}}/a^2$ — время турбулентной диффузии. При диамагнитной конвекции коэффициент турбулентной диффузии можно считать порядка l^2/t_i, где $t_i = a/v_s$ — инерционное время, l — длина перемешивания. Таким образом, при учете турбулентной конвекции время τ меньше t_s, и эта разница тем больше, чем выше температура плазмы. Этот вывод качественно согласуется с экспериментальными данными [47]. Однако экспериментально измеренное время τ при низком давлении газа является очень малым: оно оказывается сравнимым с инерционным временем, в то время как при диамагнитной конвекции время перемешивания поля, казалось бы, должно быть на порядок больше (т.е. можно было бы ожидать $l/a \sim 10^{-1}$). Это наводит на подозрение, что наряду с диамагнитной конвекцией в разряде с умеренным продольным полем существует другой, может быть, даже более сильный механизм конвекции. Возможно, что этот механизм обязан конечной проводимости плазмы, т.е. он может оказаться аналогичным рассматриваемой в следующей главе токовой конвекции. На эту мысль наталкивает также экспериментально обнаруженная в [47] зависимость τ от напряжения обхода U_0.

Таким образом, вряд ли можно сомневаться в том, что обнаруженная в работе [47] аномально быстрая диффузия поля связана с турбулентностью плазмы. Однако для окончательного выяснения механизма этой турбулентности требуются более полные экспериментальные данные.

10.2. Возникновение обратного поля

Как мы уже упоминали выше, при увеличении тока разряда продольное поле снаружи от разряда меняет знак. Особенно сильно этот эффект был выражен на Зете [33], где величина обратного поля составляла примерно одну четверть от поля на оси разряда.

Это явление нельзя объяснить ни скиновым захватом поля, ни анизотропией проводимости. Как было показано экспериментально в работе [34], его нельзя объяснить и винтовым искривлением всего шнура как целого. К этому же выводу приводит и теоретическое рассмотрение извивания шнура в квазилинейном приближении: как было отмечено в § 9, среднее поле при небольшом извивании по-прежнему сохраняет вид рис. 5 и не обнаруживает тенденции к изменению знака на периферии разряда.

Качественно эффект генерации обратного поля можно понять на основе механизма турбулентной конвекции. Заметим прежде всего, что в тороидальной камере токовый шнур всегда немного сдвинут в направлении к наружной стенке. Поэтому внутри лайнера, между его внутренней стенкой и шнуром образуется серповидная область, силовые линии в которой перескают стенки лайнера. Как правило, именно в этой области и появляется обратное поле.

В турбулентном разряде в эту область все время выбрасываются трубки с хорошо проводящей плазмой из внутренних частей разряда. При этом отдельная трубка ADB (см. рис. 4) искривляется таким образом, что только ее небольшая часть CDE оказывается на периферии, а концы остаются внутри разряда. Поэтому даже в том случае, когда периферийная силовая линия CE наклонена в обратную сторону по отношению к $\mathbf{E}_0$, ток по этому участку будет попрежнему итти в ту же сторону от C к E, так как полная ЭДС, приложенная между A и B, сохраняет свой знак при таком искривлении. Таким образом, за счет этого эффекта ток в области обратного магнитного поля должен течь против $\mathbf{E}_0$, что и наблюдается в действительности.

В законе Ома (7.4) этот эффект может быть учтен членом $\langle \sigma' \mathbf{E}' \rangle$, где σ' — пульсация проводимости, возникающая за счет смещения неодно-

* См. также [63].

родно проводящей плазмы, а $\mathbf{E}'$ — пульсация электрического поля, появляющаяся вследствие пульсации проводимости.

Можно сказать, что с учетом конечности l ток в некоторой точке пространства будет определяться не только проводимостью в данной точке, но и проводимостью и направлением магнитного поля в соседних точках, что приближенно можно учесть заменой величины $\sigma E_0 H_z$ в уравнении (7.5) на $(1/2)\ [(\sigma E_0 H_z)_{r+l}+(\sigma E_0 H_z)_{r-l}]$.

Отсюда видно, что при конечном l производная $\mathrm{d}H_z/\mathrm{d}r$ может быть отлична от нуля при $H_z=0$, так что распределение продольного поля должно принять вид, качественно представленный на рис. 5 пунктирной линией.

В предыдущем параграфе было установлено, что при увеличении E_0 выше критического значения E_c шнур в приближении продольной проводимости теряет осевую симметрию, а параметр θ замораживается. Но в приближении продольной проводимости мы искусственно разбивали движение шнура на пульсационное с масштабом $l \ll a$ и макроскопическое, описываемое посредством средних величин. В действительности такое разбиение носит чисто условный характер, и можно думать, что при приближении к критическому радиусу шнура масштаб и амплитуда пульсационных движений возрастают, что облегчает генерацию обратного поля. Как мы уже отмечали, в эксперименте генерация обратного поля имеет место как раз при замороженном значении θ.

ТОКОВАЯ КОНВЕКЦИЯ ПЛАЗМЫ

11. Токово-конвективная неустойчивость

Как мы видели выше (см. §§ 3, 4), конвективную неустойчивость можно рассматривать как результат того, что электроны и ионы в магнитном поле дрейфуют в разные стороны (точнее, что их скорости дрейфа не совпадают между собой). Здесь мы покажем, что при наличии продольного электрического тока появляется аналогичная причина для возникновения неустойчивости, которую мы будем называть токово-конвективной.

Рассмотрим следующую простейшую задачу. Пусть по плазме, находящейся в однородном магнитном поле $\mathbf{H}$, течет ток $\mathbf{j}=\sigma\mathbf{E}$, настолько слабый, что создаваемое им магнитное поле пренебрежимо мало по сравнению с H. Допустим, что в равновесном состоянии проводимость плазмы изменяется поперек магнитного поля, т.е. является, скажем, функцией от x. Для определенности предположим, что σ уменьшается с x, так что $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}x<0$ (см. рис. 8).

Рассмотрим теперь малое возмущение плазмы, состоящее в небольшом смещении в направлении оси x слоя ABCD, несколько наклоненного к оси. Так как при таком смещении проводимость в каждой неподвижной точке этого слоя возрастает на величину

$$\sigma' = -\xi \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}x}, \qquad (11.1)$$

то в целом этот слой будет обладать повышенной проводимостью по отношению к окружающей его плазме. За счет этого продольный ток в смещенном слое в первый момент несколько возрастет, и на его граничных поверхностях выступят заряды, положительный на верхней и отрицательный на нижней, которые приведут к появлению такого электрического поля, которое восстановит прежнее значение тока в слое.

Но если слой ABCD наклонен к оси z, как показано на рис. 8, то возникающая за счет этих зарядов поперечная компонента электрического поля E_y' приведет к дрейфу в направлении первоначального смещения, и следовательно, возмущение будет нарастать во времени. Таким образом, плазма с продольным током является неустойчивой по отношению к возмущениям конвективного типа, составляющим небольшой угол с направлением магнитного поля.

Найдем инкремент нарастания таких возмущений. Для простоты рассмотрим локальные возмущения, длина волны которых много меньше характерной длины, на которой происходит заметное изменение проводимости. Для таких возмущений можно воспользоваться квазиклассическим приближением и выбрать зависимость от координат и времени в виде $\exp(\nu t+\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$. Предположим, что продольное магнитное поле настолько сильное, что частота альфвеновских колебаний $C_A k_z = k_z H (4\pi n M)^{-1/2}$ много больше ν. Тогда возмущение магнитного поля будет очень мало, и следовательно, в таких колебаниях электрическое поле можно считать безвихревым, т.е. $\mathbf{E}' = -\mathrm{i}\mathbf{k}\Phi'$. В рассматриваемом нами здесь приближении исчезающе малого давления плазмы по сравнению с давлением магнитного поля поперечные скорости электронов и ионов совпадают и равны скорости электрического дрейфа:

$$v_x = \nu\xi = \frac{\mathrm{i}ck_y}{H}\Phi'. \qquad (11.2)$$

Вследствие равенства скоростей поперечная компонента электрического тока отсутствует, и величина продольного тока остается неизменной, т.е.

$$-\mathrm{i}k_z\sigma\Phi' + E\sigma' = 0. \qquad (11.3)$$

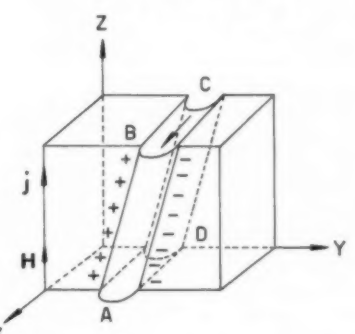


Рис. 8 Возникновение токово-конвективной неустойчивости.

Из уравнений (11.1) — (11.3) находим инкремент нарастания рассматриваемых нами возмущений:

$$\nu = \frac{k_y}{k_z} \cdot \frac{cE}{H\sigma} \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}x}. \qquad (11.4)$$

Как мы видим, инкремент возрастает при уменьшении k_z, т.е. эта неустойчивость приводит к перестановке трубок с плазмой, сильно вытянутых вдоль силовых линий магнитного поля. При $\sigma \to \infty$ продольное электрическое поле $E = j/\sigma$ стремится к нулю, и токово-конвективная неустойчивость отсутствует.

12. Неустойчивость положительного столба в магнитном поле и ламинарная конвекция

Идеальным объектом для исследования токовой конвекции является положительный столб тлеющего разряда. Экспериментально «аномальная» диффузия плазмы положительного столба поперек магнитного поля была обнаружена Ленертом [48] и затем более подробно она была изучена в работе Ленерта и Ху [49]. В этих работах изучалась зависимость продольного электрического поля E от магнитного. В положительном столбе уменьшение коэффициента диффузии приводит к уменьшению E, и поэтому при классической диффузии электрическое поле E должно было бы монотонно спадать при увеличении H. Такая зависимость E от H действительно наблюдается в эксперименте, но только при не очень сильном магнитном поле. Если поле H превосходит некоторую критическую величину H_c, то зависимость $E(H)$ резко изменяется: электрическое поле начинает сравнительно быстро возрастать, затем это возрастание несколько замедляется, и поле достигает некоторого насыщения (см. рис. 9).

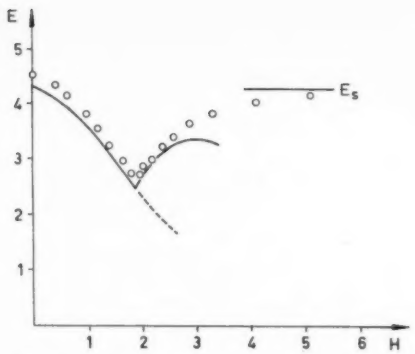


Рис. 9 Зависимость продольного электрического поля в положительном столбе от магнитного поля (He, $ap = 0{,}9$) [49].

Объяснение эффекта нарушения монотонной зависимости E от H на основе механизма токовой конвекции было дано в работе автора и Недоспасова [50]. Поскольку проводимость слабо ионизованной плазмы пропорциональна ее плотности, то в сильном магнитном поле спадающее к стенке распределение плотности плазмы по радиусу должно быть неустойчивым. Однако, чтобы эта неустойчивость действительно проявилась, магнитное поле должно быть достаточно сильным. Это следует из следующих соображений.

Во-первых, если учесть поперечную подвижность ионов, то при $k_z \to 0$ инкремент не будет уже возрастать неограниченно, поскольку возникающий в направлении поперечного электрического поля E_y' ионный ток приводит к уменьшению E_y'. В результате, выражение для инкремента (11.4) изменяется следующим образом:

$$\nu = \frac{cE}{Hn} \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{k_y k_z}{k_z^2 + (b_i/b_e)(k_\perp^2/\Omega_H^2 \tau_i^2)}, \qquad (12.1)$$

где b_i, b_e — ионная и электронная подвижности, $\Omega_H = eH/Mc$, $1/\tau_i$ — частота соударений ионов с атомами нейтрального газа (при выводе (12.1) предполагалось, что $\Omega_H \tau_i > 1$). Согласно (12.1) инкремент ν не превосходит значения ν_m:

$$\nu_m = u_0 \frac{\mathrm{d}(\ln n)}{\mathrm{d}x}, \quad u_0 = \frac{1}{2} b_i E \sqrt{\frac{b_e}{b_i}}, \qquad (12.2)$$

которого он достигает при $k_z/k_y = (1/\Omega_H \tau_i)(b_i/b_e)^{1/2} \ll 1$.

Во-вторых, при не очень сильном магнитном поле в выражении для инкремента нужно учесть затухание за счет поперечной диффузии. Так как это затухание быстро уменьшается при увеличении магнитного поля, то положительный столб потеряет устойчивость, если магнитное поле превысит некоторое критическое значение H_c.

При этом неустойчивость должна возникнуть, очевидно, на возмущении с максимально возможной поперечной длиной волны, так как затухание такого возмущения за счет поперечной диффузии минимально. Такое возмущение имеет вид винтового искривления шнура.

Расчет по такой схеме [50, 51] приводит к значениям критического магнитного поля, хорошо согласующимся с экспериментально измеренными. Дополнительное подтверждение предлагаемого механизма неустойчивости было дано в работе Пайла и др. [53], где показано, что плазменный шнур действительно становится винтовым при поле, не намного превышающем критическое. Для таких значений магнитного поля конвекцию можно считать ламинарной, а возникающую вследствие нее утечку частиц можно рассчитать в квазилинейном приближении. Такой расчет для гелия при некотором определенном значении давления нейтрального газа был проведен в работе [50] и дал хорошее согласие с экспериментальной зависимостью вплоть до значения $H = 1{,}5\ H_c$, при котором конвекционная утечка частиц на стенки в четыре раза превосходит утечку, подсчитанную по классическому коэффициенту диффузии (см. рис. 9).

Однако, при $H > 1{,}5\ H_c$ расчетная зависимость E от H сильно расходится с экспериментально измеренной. Вместе с тем, сами колебания в плазме при

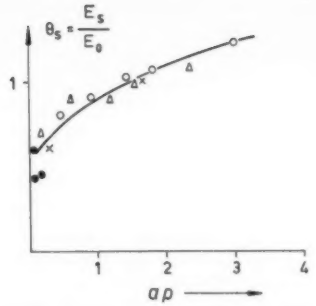


Рис. 10 Электрическое поле в турбулентном столбе в зависимости от давления нейтрального газа.
[49]: ○ — $a=1$, △ — $a=0{,}76$, × — $a=0{,}535$.
[54]: · — $a=1$.

увеличении магнитного поля теряют регулярный характер, что указывает на переход к турбулентному режиму.

13. Турбулентная конвекция плазмы положительного столба [53]

Рассмотрим разряд в очень длинной непроводящей трубке радиуса a при магнитном поле, много большем критического. В таком разряде к неустойчивости приводит широкий класс начальных возмущений, но в первую очередь появятся, очевидно, такие, для которых инкремент принимает максимальное значение (12.2). Заметим, что этот инкремент сходен с инкрементом нарастания возмущений в неоднородной жидкости, находящейся в пористой среде (см. (2.4)).

Так как поперечное движение происходит за счет электрического дрейфа $\mathbf{v}=c\,[\mathbf{H}\nabla\varphi]/H^2$, а это движение является несжимаемым, $\operatorname{div}\mathbf{v}=0$, то картину переноса плазмы поперек магнитного поля в полном смысле можно назвать конвекционной: движение любой трубки с плазмой в сторону стенок сопровождается обратным течением других трубок. Вследствие неустойчивости в разряде появляются винтовые трубки с плазмой, которые вытекают из разряда и гибнут на стенках, а вместо них внутрь разряда втекают «пузыри» без плазмы (если бы разрядная трубка была металлической, то такое втекание было бы запрещено). Но эти трубки — «пузыри» в свою очередь неустойчивы, так как на их границе развиваются более мелкомасштабные возмущения. Таким образом, в плазме развивается широкий спектр различных пульсаций, и вся картина приобретает хаотический, турбулентный характер.

Поток заряженных частиц на стенку в турбулентном разряде опять находим как $q=\langle n'v'\rangle$, где $n'=l\,\mathrm{d}n/\mathrm{d}r$, l — длина перемешивания, а пульсацию скорости v' по аналогии с движением жидкости в пористой среде можно представить в виде $v'=u_0 n'/n$. Отсюда получаем:

$$q=u_0 l^2 \frac{1}{n}\left(\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}r}\right)^2. \qquad (13.1)$$

При разряде в непроводящей трубке стенки не оказывают стабилизирующего действия на пульсации, и поэтому по аналогии со свободной турбулентностью в затопленной струе естественно выбрать длину перемешивания l не зависящей от r и пропорциональной a, т.е. $l/a=s=\mathrm{const}$.

Зная q, нетрудно решить соответствующую диффузионную задачу и найти распределение плотности электронов n по радиусу в турбулентном разряде. Это распределение заметно отличается от обычного распределения по функции Бесселя в сторону большего контрагирования к оси разряда [53]. Величину $s=l/a$ можно определить по экспериментальным данным Ленерта и Ху. При этом удобнее всего использовать такие значения давления p, для которых турбулентная утечка частиц в точности совпадает с диффузионной утечкой без магнитного поля. Для разных газов величина $s=l/a$ оказывается несколько различной: для He $s=0{,}15$, для H_2 $s=0{,}10$ и для N_2 $s=0{,}12$. Как и в турбулентной струе l/a оказывается порядка 10^{-1}.

Зная s, можно рассчитать зависимость поля насыщения E_s от давления p. Такой расчет был проделан для гелия при $s=0{,}15$. Сравнение расчетной зависимости с экспериментально измеренной приведено на рис. 10. По оси абсцисс отложено ap, по оси ординат — отношение $\theta_s=E_s/E_0$ электрического поля E_s при $H\gg H_c$ к электрическому полю E_0 в отсутствие продольного магнитного поля. Как мы видим, расчетная кривая хорошо согласуется с экспериментально измеренной зависимостью $\theta_s(ap)$.

14. Турбулентная утечка частиц из разряда в сильном магнитном поле [55]

Механизм токовой конвекции является настолько сильным, что в тлеющем разряде он приводит к утечке частиц того же порядка величины, что и без магнитного поля. Поэтому было бы странно, если бы этот механизм никак не проявлялся в сильноточных разрядах, таких, как например, в стеллараторе [56] или токамаке [57], тем более, что сама неустойчивость возникает лишь вследствие градиента проводимости, который наверняка должен быть и в полностью ионизованной плазме, если только ее температура меняется поперек разряда.

Возникающая вследствие неустойчивости конвекция должна приводить к охлаждению плазмы и утечке частиц из разряда. Чтобы оценить величину этой утечки, обратимся опять к формуле (11.4). Так как проводимость полностью ионизованной плазмы пропорциональна температуре электронов в степени 3/2 и не зависит от плотности, то величину $(1/\sigma)\,\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}x$ в (11.4) можно заменить на $(3/2)\,(1/T)\,\mathrm{d}T/\mathrm{d}x$. Кроме того, в выражении для инкремента следует учесть затухание за счет рассасывания флуктуаций температуры вследствие теплопроводности. Так как теплопроводность поперек магнитного поля значительно меньше про-

дольной, то ею можно пренебречь, и тогда выражение для v примет вид:

$$v = \frac{3}{2}\frac{k_y}{k_z}\frac{cE}{HT}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} - \chi k_z^2, \qquad (14.1)$$

где χ — температуропроводность электронов вдоль магнитного поля.

Как видно из выражения (14.1), наибольшим инкрементом опять обладают возмущения, сильно вытянутые вдоль магнитного поля. т.е. с $k_z \to 0$. Но в реальных условиях k_z не может быть сколь угодно малым. Действительно, в идеализированной задаче, рассмотренной в § 11, магнитное поле считалось совершенно однородным. На самом же деле текущий по плазме ток создает азимутальное магнитное поле $H_\theta \approx 2\pi r j/c$, вследствие чего силовые линии становятся винтовыми с шагом $l = 2\pi r H/H_\theta \approx cH/j$. Согласно условию Крускала-Шафранова шаг l должен быть больше L_0 — длины обхода тора, так как иначе шнур с током в сильном продольном поле будет неустойчив относительно извивания. Обычно максимальный ток в разряде выбирается близким к этому пределу. Так как плотность тока не является постоянной по сечению, то шаг l может изменяться в зависимости от радиуса на величину того же порядка. Поэтому две силовые линии, находившиеся на расстоянии $\lambda_x = 2\pi/k_x$ друг от друга по радиусу, разойдутся на расстояние $\lambda_y \approx z\lambda_x/l$ при движении вдоль этих линий на длину z. Но при $\lambda_y \gtrsim 2\pi/k_y$ магнитное поле уже нельзя считать однородным для данного возмущения, и следовательно, k_z не может быть меньше $2\pi k_y/lk_x$, т.е. приближенно, по порядку величины,

$$k_z > \frac{k_y}{k_x} k_0, \qquad (14.2)$$

где $k_0 \approx 2\pi/L_0$. Для стелларатора и токамака $k_0 \sim 10^{-2}$.

В турбулентной плазме с развитыми пульсациями можно считать $k_y \sim k_x$. Тогда из (14.1), (14.2) получим приближенно:

$$v_{\max} \approx \frac{3}{2}\frac{k_x Ec}{k_0 HT}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} - \chi k_0^2. \qquad (14.3)$$

Отсюда видно, что к неустойчивости приводят только такие возмущения, у которых длина волны $\lambda_x = 2\pi/k_x$ достаточно мала. А поскольку λ_x должна быть больше ларморовского радиуса ионов, то отсюда следует, что при очень большой теплопроводности электронов (т.е. при высокой температуре и сравнительно малой плотности) токово-конвективная неустойчивость должна отсутствовать. Как показывают оценки, условия в стелларараторе и токамаке таковы, что эта неустойчивость еще существует, но при дальнейшем повышении температуры должна прекратить свое существование.

Если неустойчивость имеет место, то развивающаяся вследствие нее конвекция приведет к тепловому потоку $q = n\chi_T \mathrm{d}T/\mathrm{d}r$, где $n\chi_T \approx n\lambda_x^2 \nu_{\max}$ — коэффициент турбулентной теплопроводности, λ_x — максимальная длина волны, для которой еще $\nu_{\max} > 0$. Наряду с тепловым потоком конвекционное перемешивание приводит к утечке частиц. Соответствующий расчет, детали которого опубликованы в другом месте [55], приводит к следующей формуле для времени жизни плазмы:

$$\tau = \frac{A}{N^{3/4}}\frac{a}{v_s}\left(\frac{v_s\chi}{L_0}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{H}{cE}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (14.4)$$

где a — радиус ограниченного диафрагмами шнура, $v_s = (T/M)^{1/2}$ — скорость звука, L_0 — длина обхода, χ — температуропроводность электронов вдоль магнитного поля, N — число диафрагм, A — численный множитель порядка единицы.

Подсчитанное по формуле (14.4) время жизни частиц в разряде по порядку величины совпадает с экспериментально измеренным. Это показывает, что механизм токовой конвекции может давать заметный вход в утечку частиц из разряда, наблюдаемую на опыте.

К сожалению, разреженная высокотемпературная плазма в установках стелларатор и токамак представляет собой очень сложный объект исследования, и наряду с рассмотренным здесь механизмом неустойчивости в ней могут развиваться другие типы колебаний, в частности, ионный звук [58, 59]. Поэтому для окончательного решения вопроса о механизме «аномальной» утечки частиц из разрядов такого типа требуются дополнительные исследования.

15. Заключение

Итак, проводя аналогию с турбулентной конвекцией обычной жидкости, удается с единой точки зрения объяснить «аномальную» диффузию плазмы в ловушке с магнитными пробками и в разряде с продольным магнитным полем. Надо сказать, что вопрос об «аномальной» диффузии плазмы поперек магнитного поля возник довольно давно. Впервые он был поставлен Бомом [60], который обратил внимание на то, что наличие колебаний в сильно «замагниченной» плазме может привести к значительному увеличению утечки плазмы поперек магнитного поля. Бом полагал, что в такой нестационарной плазме поток частиц по-прежнему пропорционален градиенту плотности $\mathbf{q} = -D_T \nabla n$, причем коэффициент турбулентной диффузии он принял равным $D_T = A(cT/eH)$ $(A \sim 10^{-1})$. Бом выбрал это выражение из соображений размерности, не имея в виду какого-либо конкретного механизма возбуждения и поддержания колебаний в плазме. Поэтому создавалась иллюзия универсальности этого коэффициента диффузии.

В действительности, как это видно хотя бы из разобранных в настоящей работе примеров, универсального коэффициента диффузии не существует. Более того, если колебания плазмы возникают за счет ее неоднородности, то само понятие коэффициента диффузии становится число формальным: величина $D_T = \langle \lambda v_\lambda' \rangle$ при этом сама зависит от градиента плотности и может быть определена только после полного решения задачи с учетом всех граничных условий.

Что касается утечки частиц, то в каждом конкретном случае она определяется своим специфическим механизмом неустойчивости и в зависимости от этого механизма может изменяться в самых широких пределах.* Поэтому вопрос о причинах и величине «аномальной» диффузии в той или иной экспериментальной установке сводится к вопросу о том, с чем связана неустойчивость плазмы и каков механизм подпитки колебаний.

Ввиду сложности вопроса о нелинейных колебаниях плазмы решающее слово принадлежит, разумеется, эксперименту, который должен либо отвергнуть, либо подтвердить ту или иную теоретическую модель. Именно из-за полного отсутствия соответствующих экспериментальных данных мы обошли молчанием интересный вопрос о структуре самой турбулентности, т.е. о спектре колебаний и передаче энергии от одних пульсаций к другим. В настоящее время эти вопросы дискутируются, главным образом, в применении к астрофизике с точки зрения генерации магнитного поля в хаотически движущихся межзвездных облаках. Однако турбулентное движение облаков, являющееся по сути дела следствием гидродинамической неустойчивости течений, мало отличается от турбулентности обычной жидкости. Двумерная диамагнитная конвекция плазмы низкого давления и, тем более, токово-конвективная турбулентность отличаются, конечно, гораздо большим своеобразием. Поэтому изучение структуры этих, а также других, более тонких, турбулентных состояний плазмы может оказаться очень ценным для выработки некоторого более общего взгляда на природу турбулентного состояния текучих сред.

Литература

[1] Веденов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З., *УФН*, **73** (1961) 701.
[2] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Механика сплошных сред. (М., Гостехиздат, 1953).
[3] Benard, M., *Ann. Chem. Phys.*, **23** (1901) 62.
[4] Lord Rayleigh, *Phil. Mag.*, **32** (1916) 529.
[5] Pellers, A., Southwell, R. V., *Proc. Roy. Soc.* **A 176** (1940) 312.
[6] Сорокин В. С., *Прикл. Матем. и Механика* **18** (1954) вып. 1.
[7] Горьков Л. П., *ЖЭТФ*, **33** (1957) 402.
[8] Malkus, W., Veronis, G., *J. Fluid Mech.* **4**, (1958) 225.
[9] Palm, E., *J. Fluid Mech.*, **8**, (1960) 183.
[10] Nakagava, Y., *Phys. Fluids*, **3**, (1960) 82.
[11] Зельдович Я. Б., *ЖЭТФ*, **7** (1937) вып. 12.
[12] Townsend, A. A., *J. Fluid Mech.*, **5**, (1959) 209.
[13] Stuart, I. I., *J. Fluid Mech.*, **4** (1958) 1.
[14] Абрамович Г. Н., Теория турбулентных струй (М., Физматгиз, 1960).

*В настоящей работе мы учитывали только гидромагнитные неустойчивости. Надо думать, что к аналогичными эффектам должны приводить и другие виды неустойчивости, в частности, кинетические. Однако с точки зрения удержания плазмы магнитным полем наибольшую опасность представляют, по-видимому, именно гидромагнитные неустойчивости, поскольку они приводят к перемещению макроскопических участков плазмы на довольно большие расстояния.

[15] Shin-I Pai, Fluid Dynamics of Jets, 1954. (Есть русск. перевод: Бай Ши-и, Теория струй, 1960).
[16] Longmire, L., Rosenbluth, M., *Ann. of Phys.* (*N.Y.*) **1**, (1957) 120.
[17] Кадомцев Б. Б., сб. Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций, т. **4** (1958) 16.
[18] Post, R. F., Ellis, R. E., Ford, F. C., Rosenbluth, M. N., *Phys. Rev. Letters* **4** (1960) 166.
[19] Berkowitz, J., Grad, H., Rubin, H. Proc. of the Second Intern. Conf. on Peaceful Uses of Atomic Energy, Geneva, **31** (1958) 177.
[20] Велихов Е. П., *ЖТФ*, **31** (1961) 56.
[21] Suydam, B., see [19], **31** (1958) 157.
[22] Rosenbluth, M., see [19], **31** (1958) 85.
[23] Newcomb, W. A. *Ann. Phys.* (*N.Y.*) **10**, (1960) 232.
[24] Furth, H. P., *Phys. Fluids*, **3** (1960) 277.
[25] Spitzer, L., *Phys. Fluids*, **1** (1958) 253.
[26] Johnson, J., Oberman, C., Kulsrud, R., Frieman, E., *Phys. Fluids* **1** (1959) 281.
[27] Богданов Г. Ф., Головин И. Н., Кучеряев Ю. А., Панов Д. А., Исследование свойств плазмы в Огре, доклад, Зальцбург, 1961.
[28] Бревнов Н. Н., Романовский М. К., Томащук Ю. Ф., Исследование плазмы в адиабатической ловушке «Огренок», доклад, Зальцбург, 1961.
[29] Кадомцев Б. Б., *ЖЭТФ*, **40** (1961) 328.
[30] Иоффе М. С., Соболев, Р. И., Тельковский В. Г., Юшманов, Е. Е., *ЖЭТФ*, **39** (1939) 1602; **40** (1961) 40.
[31] Иоффе М. С., Юшманов Е. Е., Экспериментальное исследование неустойчивости плазмы в ловушке с магнитными пробками, доклад, Зальцбург, 1961.
[32] Кадомцев Б. Б., Турбулентный разряд в продольном магнитном поле, доклад, Зальцбург, 1961.
[33] Butt, E. P., Carruthers, R., Mitchell, J. T. D., Pease, R. S., Thonemann, P. C., Bird, M. A., Blears, J., Hartill, E. R., see [19], **32** (1958) 42.
[34] Lees, D. J., Rusbridge, M. G., Proceedings of the Fourth International Conference on Ionization Phenomena in Gases, Uppsala, (North-Holland Pub. Co., Amsterdam) **2** (1959) 954.
[35] Бабичев А. П., Карчевский А. И., Муромкин Ю. А., Сокольский В. В., О механизме сильноточного газового разряда в слабом магнитном поле, доклад, Зальцбург, 1961.
[36] Афросимов В. В., Глухих В. А., Голант В. Е., Зайдель А. Н., Комар Е. Г., Константинов Б. П., Малышев Г. Н., Моносзон М. Л., Столов А. М., Федоренко, М. В., *ЖТФ*, **30** (1960) 1381.
[37] Colgate, S. A., Furth, H., U.S. Atomic Energy Commission Report UCRL-5862 (1960).
[38] Леонтович М. А., Шафранов В. Д., Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций, т. **1** (1958) 207.
[39] Шафранов В. Д., *Атомная энергия*, **5** (1956) 38.
[40] Tayler, R., *Proc. Phys. Soc. A* **70** (1957) 31, 1049.
[41] Kruskal, M., Johnson, J., Gottlieb, M., Goldman, L., *Phys. Fluids*, **1** (1958) 421.
[42] Sawyer, G. A., Scott, P. L., Stratton, T. E., *Phys. Fluids*, **2** (1959) 47.
[43] Wilcox, J. M., Boley, E. I., *Phys. Fluids*, **3** (1960) 141.
[44] Ware, A. A., *J. Nucl. Energy, Part C*, **3** (1961) 93.
[45] Allen, N. L., *Nature*, **4784** (1960) 279.
[46] Rusbridge, M. G., Jones, H. W., Lees, D. J., Saunders, P. A., Witalis, E. A., *J. Nucl. Energy, Part C*, **3** (1961) 98.
[47] Lees, D. J., Rusbridge, M. G., *Phys. Fluids*, **4** (1961) 653.
[48] Lehnert, B., see [19], **32** (1958) 349.
[49] Hoh, F. C., Lehnert, B., *Phys. Fluids*, **3** (1960), 600.
[50] Kadomtsev, B. B., Nedospasov, A. V., *J. Nucl. Energy, Part C*, **1** (1960) 230.
[51] Вдовин В. Л., Недоспасов А. В., *ЖТФ* (в печати).
[52] Allen, T. K., Paulikas, G. A., Pyle, P. V., *Phys. Rev. Letters*, **5** (1960) 409.
[53] Кадомцев Б. Б., *ЖТФ* **31** (1961) 1273.

[54] Зайцев А. А., Васильева М. Я., *ЖЭТФ*, **38** (1960) 1639.
[55] Кадомцев Б. Б., *ЖТФ* **31** (1961) 1209.
[56] Ellis, R. A., Goldberg, L. P., Gorman, J. G., *Phys. Fluids*, **3** (1960) 428.
[57] Горбунов Е. П., Долгов-Савельев Г. Г., Муховатов В. С., Стрелков В. С., Явлинский Н. А., *ЖТФ*, **30** (1960) 1152.
[58] Bernstein, I. B., Frieman, E. A., Kulsrud, R. M., Rosenbluth, M. N., *Phys. Fluids* **3** (1960) 136.
[59] Ellis, R. A., Goldberg, L. P., Gorman, J. G., *Phys. Fluids*, **3** (1960) 797.
[60] Guthrie, A., Wakerling, R. K., (Ed.). The Characteristics of Electrical Discharges in Magnetic Fields (McGraw-Hill, New York, 1949).
[61] Rosenbluth, M. N., Rostoker, N., Krall, N. A. *Nuclear Fusion:* 1962 Supplement, page 143.
[62] Rusbridge, M. G., Lees, D. J., Saunders, P. A. H. "Electric and Magnetic Field Fluctuations in High-Current Toroidal Discharges" IAEA Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research, Salzburg (Sept. 1961): Abstract CN-10/58.
[63] Lees, D. J., Hobbs, G. D., Jones, H. W., Rusbridge, M. G., Saunders, P. A. H. "Skin Formation and Diffusion in a Toroidal Discharge", ibid., Abstract CN-10/52.

(Рукопись получена 31 августа 1961 г.)

LETTERS TO EDITOR

ANGULAR MOMENTUM RELATIONS FOR PLASMAS IN MAGNETIC FIELDS

Controlled thermonuclear fusion research has produced volumes of experimental results [1, 2, 3]. Plasmas in magnetic fields have been found generally to be unstable; the nature of the instability depends on many factors, such as the configuration of the magnetic field, heating process, etc. Indeed the literature lists instabilities of many different types, any one of which suffices to destroy a plasma.

During the observed lifetime of a plasma, the phenomenon of rotation has been noted, leading to the question whether this affects the stability in any way, either beneficially or otherwise. There is interest also in the nature of the rotation itself. For example, at the Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research (Salzburg, Austria, September 1961) Dr. Peter Thonemann raised the question whether a plasma produced by injection of energetic particles from an external source might be different in its stability properties from a plasma that is heated while being contained in a magnetic field.

This communication represents the discussion of the writer presented at the Conference in response to Dr. Thonemann's question. It describes allocations of the canonical angular momentum of a plasma confined by a magnetic field in terms of the ion and electron temperatures, particle density, observed rotation, and electric fields. Such identification on a physical basis of the portions of the canonical angular momentum seems to be useful in predicting what may occur when the plasma is heated in various ways. Because of the necessary rotation of the plasma (as we shall see below), centrifugal forces occur which add various complications. Also, sheaths may form at the boundaries of the plasma, depending on the density, which affect the nature of the rotation.

As an introduction to the present situation, the Einstein-de Haas [4] effect (see Fig. 1) is an interesting example of the invariance of total angular momentum: when a magnetic field is established so as to change the magnetic moment of a specimen, the latter experiences a mechanical torque impulse. It has been found experimentally [5] that, within the limits of measurement, the mechanical torque impulse which results from magnetizing a specimen of iron is independent of the location of the source of magnetic field; that is, the specimen system receives the same (measured) mechanical torque impulse whether the magnetizing coil is attached to the specimen or is supported separately.

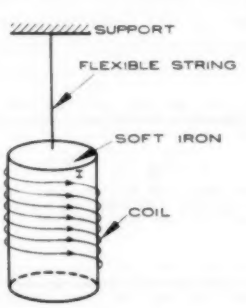


Fig. 1

When a plasma is magnetized (having a diamagnetic moment, of course), effects of a similar nature occur, although the situation is more complicated because the particles are not bound together in a rigid body. Also, electric fields develop in general, as will be discussed below. The quantity which is conserved is the canonical angular momentum. (This consists of electromagnetic as well as mechanical angular momentum.)

Because practically all proposed fusion machines possess some sort of cyclindrical symmetry, we shall specify our "system" to be a plasma in the form of a cylinder, confined by magnetic lines of force taken to be closed on themselves without intersecting material walls. The boundary of the system is a closed surface S, chosen so that no lines of magnetic flux cross its surface. We assume for convenience that the plasma initially is in a stable condition having negligible radiation and particle losses. Space-charge neutrality is assumed within the volume of the plasma; the density of singly-charged ions n_i is equal to the density of electrons n_e. A plasma sheath may be present at S. The material wall of the "external universe" is cylindrical and coaxial with the plasma axis.

As reference coordinates we select cylindrical, the z-axis coinciding with the axis of symmetry. The other two coordinate axes, r and θ, have their conventional significance. The canonical angular momentum of the system will be referred to the z-axis.

The expression for the canonical angular momentum is well-known. For the present case of cylindrical symmetry, with A_θ representing the θ-component of the vector magnetic potential, e representing the electric charge and m representing the mass, the canonical angular momentum of a particle in a magnetic field is:

$$P_\theta = m r^2 \dot{\theta} + e r A_\theta \tag{1}$$

$$A_\theta = A_0 r \tag{2}$$

For the particles of a plasma we make the obvious sum:

$$\sum_j m_j r_j^2 \dot{\theta}_j = J_\mathrm{p} + J_\mathrm{d} \tag{3}$$

$$\sum_j e_j r_j A_{\theta j} = J_\mathrm{m} \tag{4}$$

$$\sum_j (P_\theta)_j = J_\mathrm{t} = J_\mathrm{p} + J_\mathrm{d} + J_\mathrm{m} \tag{5}$$

The angular momentum of the plasma particles with respect to their guiding centers is

$$J_p = \frac{2\pi L}{e}\int_0^{r_s}\frac{n(r)}{B(r)}\,r\,dr \times\left[\frac{\int_0^\infty m_i^2 v_i^2\frac{\partial n_i}{\partial v_i}\,dv_i}{\int_0^\infty \frac{\partial n_i}{\partial v_i}\,dv_i} - \frac{\int_0^\infty m_e^2 v_e^2\frac{\partial n_e}{\partial v_e}\,dv_e}{\int_0^\infty \frac{\partial n_e}{\partial v_e}\,dv_e}\right] \quad (6)$$

where L denotes the axial length of the plasma; e denotes the particle charge (positive for singly-charged ions and negative for electrons); $n(r, v)$ denotes the radial and velocity dependence of charge density; $B(r)$ denotes the radial dependence of the actual magnetic field; m_i and m_e denote the ion and electron masses respectively; $\partial n/\partial v$ is the slope of the density distribution in velocity space, with v representing velocity perpendicular to magnetic lines of force; subscripts i and e refer to ions and electrons.

The integral

$$\frac{\int_0^\infty \frac{mv^2}{2}\frac{\partial n}{\partial v}\,dv}{\int_0^\infty \frac{\partial n}{\partial v}\,dv}$$

represents the thermal kinetic energy associated with motion perpendicular to magnetic lines of force, and is denoted by kT. Hence we have [6]:

$$J_p = \int_0^r [4\pi r n L/Be]\,[m_i k T_i - m_e k T_e]\,dr. \quad (7)$$

The drift angular momentum of the plasma is given by:

$$J_d = \int_0^r 2\pi r^2 n L\,[m_i + m_e]\,[\mathbf{E}\times\mathbf{B}/B^2]\,dr. \quad (8)$$

The electromagnetic angular momentum is given by:

$$J_m = \int_0^r 2\pi r^2 L\,[\mathbf{E}\times\mathbf{B}/4\pi c^2]\,dr. \quad (9)$$

The preceeding Eqs. (7), (8), (9) are convenient inasmuch as they describe the portions of the canonical angular momentum of the system. If the angular momentum with respect to guiding centers J_p increases because of heating, it must be counterbalanced by drift angular momentum of the plasma J_d plus electromagnetic angular momentum J_m. Both J_d and J_m require the presence of the electric field **E**. The change in J_p, which may occur in the particle motions *throughout* the plasma, must be counterbalanced by effects within those regions where the electric field **E** exists.

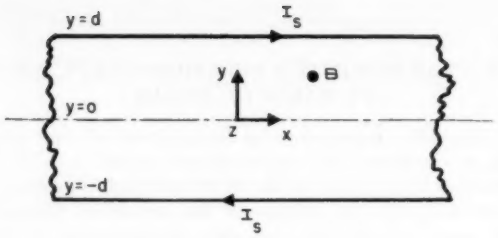


Fig. 2

For the cylindrical system that we are considering, we need to take into account the effect of centrifugal forces produced by the rotation associated with the J_d term, and also the effect of polarization resulting from drift motion, which may alter the electric field distribution. There is the question whether "slip-stream instabilities" arise which may tend to force the plasma to rotate as a solid body.

These considerations are quite complicated, and too lengthy for inclusion in the present remarks. It may be appropriate, however, to sketch the nature of some of the phenomena by considering the idealized case of a "slab" plasma in a magnetic field, as indicated in Fig. 2, for which centrifugal forces are absent. We are interested in the effects that occur when this plasma is heated.

The magnetic field **B** is directed out of the plane of the paper; the plasma extends indefinitely in the x and z directions, and is of thickness $2d$ in the y direction. The coordinate system is chosen so that the plasma boundary is located at $y = \pm d$.

As previously, we make a number of simplifying assumptions, taking the plasma to be initially electrically neutral; at each point the density of positive charges equals the density of negative charges, and at the boundary the Larmor radii of the positive and negative charges are assumed to be equal. We assume that the density of guiding centers is constant throughout the plasma, and that no currents flow in the interior of the plasma. Thus initially the plasma is assumed to be quiescent, stable, homogeneous, with no currents or electric fields in the interior, and with negligible diffusion.

Now let us suppose that the plasma is heated, for example by heating the electrons only, without affecting the ions. After this heating process, there is an excess negative charge at the boundaries $y = \pm d$, and a deficiency of negative charge in the region of $y = 0$,

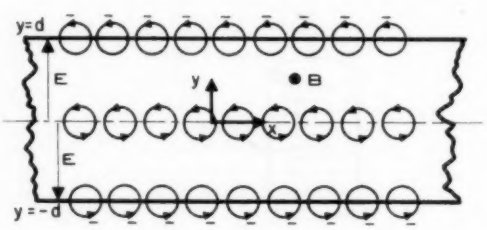


Fig. 3

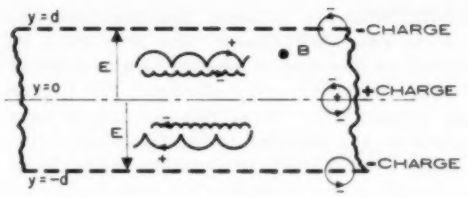


Fig. 4

as shown in Fig. 3. Thus an electric field **E** is set up having the direction from $y=0$ to $y=+d$, and from $y=0$ to $y=-d$. Accordingly, the plasma experiences the "crossed-field drift" $\mathbf{E}\times\mathbf{B}/B^2=V_x$. The magnitude of the electric field E is kT/d, where kT represents the heating increment. It is seen that the direction of the plasma drift is in the positive x-direction for y positive, and in the negative x-direction for y negative, giving a drift angular momentum in the opposite direction to the angular momenta of the electrons with respect to their guiding centers.

The drift motion of the plasma produces a charge separation, as indicated in Fig. 4. This charge separation, arising from the drift motion, causes cancellation of the electric field in the interior of the plasma.

Thus the situation evolves, in the present idealized case, as indicated in Fig. 5, which shows a sheath of thickness δ. The electric field **E** exists across the distance δ, having magnitude approximately kT/δ, with E being substantially zero within the interior of the plasma.

Clearly, the plasma drift motion produces a velocity distribution in the region of the sheath; that is, the outer regions of the plasma have drift motion, while the interior regions do not. This situation, which is the result of heating the plasma, can be expected to produce a "slip-stream" instability. A similar conclusion, even though complicated by centrifugal-force effects, applies to actual experimental situations.

Returning now to the cylindrical configuration, let us consider the implications of Eq. (7). We have just seen that a change in the quantity J_p requires a compensating change in J_d and J_m. But the change in J_d produces, in general, a slip-stream instability. Thus one may conclude that the governing parameters are $(m_i kT_i - m_e kT_e)/B$. In a device like the stellarator, for which B is essentially constant during the heating process, the equipartition of energy between ions and electrons means that the angular momentum of the ions is far greater (by the ratio of ion to electron mass) than that of the electrons. On the basis of the elementary analysis so far presented, it appears that the plasma of a stellarator should be unstable during any heating process, regardless of how the heating is achieved. Furthermore, the disturbance to the plasma depends, according to Eq. (7), on B^{-1}. Experimentally, behavior of this nature seems to be observed.

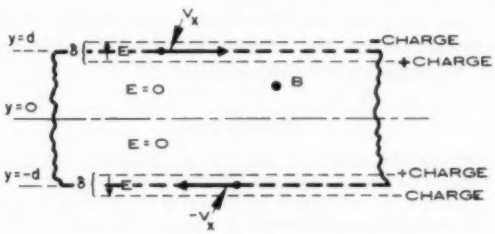


Fig. 5

In contrast to the stellarator case, a mirror machine employing adiabatic compression as the heating process should *not* suffer from the slip-stream instability described above. The constancy of the magnetic moment of the plasma particles implies also that the angular momentum is constant; hence there is no change in J_p, J_d, or J_m.

In situations like DCX and OGRA, for which particles have angular momentum derived from external sources, the conclusions of the present analysis are not directly applicable. But because no heating process occurs, one would not expect velocity-shear situations to develop.

For *rare* plasmas, meaning situations for which J_m exceeds J_d appreciably, a change in J_p can be compensated by a change in J_m without need for drift motion. In such cases, no slip-stream instability is expected.

References

[1] Proceedings of the Second UN International Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy (United Nations, Geneva, 1958), Vols. 31 and 32.
[2] Glasstone, S., Lovberg, R. H., Controlled Thermonuclear Reactions (D. Van Nostrand Co. Inc., Princeton, New Jersey, 1960).
[3] Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research, International Atomic Energy Agency, Salzburg, Austria, September 1961.
[4] Einstein, A., de Haas, W. J., *Verh. d. D. Phys. Ges.* **17** (1915) 152.
[5] Barnett, S. J., *Rev. Mod. Phys.* **7** (1935) 155.
[6] Linlor, W. I., *Bulletin Amer. Phys. Soc.*, Series II, **6** (1961) 193.

W. I. LINLOR

Hughes Research Laboratories
Malibu, California, U.S.A.

Received 25 September 1961.

TORQUE ON A PLASMA IN TERMS OF MAGNETIC STRESS

A feature of current interest in induction pinches [1, 2, 3], is the very rapid rotation of the plasma deduced from photographs taken with a framing camera at intervals of about $\frac{1}{8}$ μs. It is importaut to note that this method of measuring the rotation depends on the existence of a sufficient departure from axial symmetry of the plasma, so that its change of orientation can be detected. In fact, when rotation is observed, it is often followed by an instability, such that one or more jets is ejected from the plasma. Often the plasma breaks into two parts (Bodin, private communication). It must also be emphasised, that what is proved by the observations is that the outline of the plasma rotates, and that this could be compatible with some kind of wave motion in which the plasma as a whole did not rotate, and in which the total angular momentum of the plasma could be zero. It can be said that when the plasma breaks in two, it appears to have angular momentum. This note is restricted to the question of how the plasma could acquire angular momentum, and is further restricted to electromagnetic mechanisms for the transfer of the angular momentum (an "explanation" could be got by assuming a strong friction with the walls for electrons, weak for ions).

To express the electromagnetic contribution to the transfer of angular momentum, the well-known theory of the Maxwell stress tensor is adapted. The result is in fact just the vector product with $\mathbf{r}$ of the expression for a force on a finite body, but the required transformations are given in the following string of equations. The origin for the position vector $\mathbf{r}$ is arbitrary. From the Lorenz force the torque $\mathbf{G}$ on an arbitrary volume is given by

$$\mathbf{G} = \int \left(\varrho \mathbf{E} + \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{B}}{c} \right) \times \mathbf{r} \, \mathrm{d}V. \tag{1}$$

Substitute

$$4\pi \varrho = \operatorname{div} \mathbf{E}$$

$$4\pi \mathbf{j} = c \operatorname{curl} \mathbf{B} - \dot{\mathbf{E}} \tag{2}$$

and use the identities

$$\int (\nabla \cdot \mathbf{E}) \, \mathbf{E} \times \mathbf{r} \, \mathrm{d}V = \oint (\mathbf{E} \times \mathbf{r}) \, \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} - \int [(\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E}] \times \mathbf{r} \, \mathrm{d}V$$

$$- (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E} = \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) - \tfrac{1}{2} \nabla (E^2)$$

$$(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \tfrac{1}{2} \nabla (B^2)$$

$$\int [(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}] \times \mathbf{r} \, \mathrm{d}V = \oint (\mathbf{B} \times \mathbf{r}) \, \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

$$\int \nabla (E^2 + B^2) \times \mathbf{r} \, \mathrm{d}V = \oint (E^2 + B^2) \, \mathbf{r} \times \mathrm{d}\mathbf{S}, \tag{3}$$

to obtain

$$8\pi \mathbf{G} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{2}{c} \int (\mathbf{B} \times \mathbf{E}) \times \mathbf{r} \, \mathrm{d}V + \oint (E^2 + B^2) \, \mathbf{r} \times \mathrm{d}\mathbf{S}$$

$$+ \oint (\mathbf{E} \times \mathbf{r}) \, \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} + \oint (\mathbf{B} \times \mathbf{r}) \, \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \tag{4}$$

Under hydromagnetic conditions it is expected that the terms involving $\mathbf{E}$ will be small, because $E \sim uB/c$ where u is some characteristic velocity, which is much less than c. The first term can be regarded as the rate of change of the angular momentum of the electromagnetic field. This is generally small because the ratio of the moment of inertia of the field to the moment of inertia of the plasma is of order $B^2/4\pi\mu c^2$, where μ is the mass density of the plasma, or V_A^2/c^2, where V_A is the Alfvén speed and is usually much less than c. The terms involving $\mathbf{E}$ therefore have the form of relativistic corrections when the conditions are hydromagnetic. In the experiments with induction pinches these terms should be small, unless the current density becomes so big that the electrons reach a velocity approaching the velocity of light, in which case the Hall effect would cause an electric field whose strength would approach that of B.

Even though rotation of the plasma cannot be observed when the plasma is axially symmetric, it is useful, for the sake of simplicity, to consider the torque on an axially symmetric volume about its axis of symmetry. The origin must be taken on the axis of symmetry. Then $\mathbf{r}$ and $\mathrm{d}\mathbf{S}$ both lie in the meridian plane and the second term in the right hand side of Eq. (4) must be perpendicular to the axis of symmetry and hence gives no contribution to the torque about the axis of symmetry. Then the right hand side reduces to its last term, which may be written, The important conclusion is that, to obtain a torque, introducing cylindrical coordinates r, θ, z, as $\oint r B_\theta \, \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$ B_θ must not vanish on the surface considered. If the field is axially symmetrical, it then follows that current must flow through parts of the surface, and it is difficult to escape the conclusion that current must flow in a circuit which is partly in the tube wall and partly in the plasma. If the current circuit were excluded from the wall, angular momentum would merely be transferred to the central body of plasma from the outer part of the plasma. Although the tube is made of insulating material, K. V. Roberts (see [1]) has pointed out that its inner surface will be made conducting by bombardment with all kinds of exciting radiations from the plasma.

I am indebted to Drs. Niblett and Bodin for information about the experiments and for checking the intelligibility of this note.

References

[1] Bodin, H. A. B., Green, T. S., Niblett, G. B. F., Peacock, N. J., Quinn, J. M. P., Reynolds, J. A., Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research, Salzburg, Austria, September 1961: Paper CN-10/71.

[2] Kolb, A. C., Griem, H. R., Lupton, W. H., Phillips, D. T., Ramsden, S. A., McLean, E. A., Faust, W. R., Swartz, M., *ibid.* Paper CN-10/189.

[3] Little, E. M., Quinn, W. E., Ribe, F. L., *ibid.* Paper CN-10/155.

J. W. DUNGEY

Atomic Weapons Research Establishment
Aldermaston, Berks., U.K.

Received 23 October 1961.

ABSTRACTS IN ENGLISH

Relativistic plasma, BEHRAM KURŞUNOĞLU *(Department of Physics, University of Miami, Coral Gables, Florida, U.S.A.).*
Nuclear Fusion **1** (1961) 213—223

The relativistic transport equation for a one-particle distribution function is discussed. Transverse and longitudinal oscillations of a low-density plasma in the absence of external fields is considered by neglecting the collisions. Relativistic dispersion relations are derived and compared with non-relativistic theory.

Acceleration of plasma by traveling electromagnetic waves, J. KATZENSTEIN *(University of New Mexico, New Mexico, U.S.A.)*
Nuclear Fusion **1** (1961) 224—232

A type of plasma accelerator is proposed in which the plasma is confined in a magnetic field in the form of an accelerating cusp, the confinement obtaining through the combined action of the magnetic field and the equivalent gravitational field of the acceleration. The accelerating cusp is produced by a transient wave on a suitable transmission line of constant characteristic impedance and increasing velocity of propagation. Such a transmission line is in the form of a tapered solenoid suitably loaded with distributed capacitance to preserve constant characteristic impedance. An order-of-magnitude calculation of the performance of such a line is made and it is found that a line 3 m long with a characteristic impedance of 12.6 ohms and an applied voltage of 300 kV can accelerate 10^{17} deuterons to 50 keV energy. Several possible experiments on the confinement of hot plasmas using such an accelerator are described.

Diagnostics of the confinement and heating of a plasma by a rising axial magnetic field (orthogonal pinch), J. W. MATHER *(University of California, Los Alamos Scientific Laboratory, Los Alamos, New Mexico, U.S.A.)*
Nuclear Fusion **1** (1961) 233—256

Heating and confinement of a deuterium plasma by a rising axial magnetic field in cylindrical geometry is investigated as a function of applied voltage, mirror ratio (R_m), discharge tube material and tube shape for several scaling geometries at a given aspect ratio $D/L = 0.44$. Diagnostic methods include internal and external magnetic probes, fast streak photography and magnetic flux and neutron measurements. Magnetic probes show the existence of trapped reverse fields and the subsequent intermixing of plasma and field during the second half and later compression cycles. Plasma confinement from the walls during the second and third half discharge cycle is inferred from streak photographs and the duration of neutron production. As the mirror ratio is reduced to ~ 1, the yield and duration of neutron production increases while plasma end streaming is enhanced. Azimuthal asymmetries in the axial field in the mirror are associated with neutron production. Reducing the θ-asymmetry to $\sim 1\%$ reduces neutron production by a factor of ~ 3. The main effects of the small field perturbations may be explained in terms of the nonuniform formation and detachment of the current sheath from the discharge tube walls. This can lead to the influx of wall impurities which may account for the lower nuclear yields.

A parameter study of magnetic compression of plasmas with end losses, A. C. KOLB, W. R. FAUST, A. D. ANDERSON *(United States Naval Research Laboratory, Washington, D.C., U.S.A.)*
Nuclear Fusion **1** (1961) 257—263

Numerical calculations of the adiabatic compression of a collision-dominated plasma in finite, single-turn coils have been carried out with the initial β and plasma state as parameters. The end losses drastically influenced the character of the discharge, as is observed experimentally. However, the measured heating rate for the electrons is much higher than predicted, pointing to an additional heating mechanism, presumably involving the dissipation of an initially trapped reverse magnetic field in the plasma.

Energy distributions of protons in DCX, C. F. BARNETT, J. L. DUNLAP, R. S. EDWARDS, G. R. HASTE, J. A. RAY, R. G. REINHARDT, W. J. SCHILL, R. M. WARNER, E. R. WELLS *(Oak Ridge National Laboratory, Oak Ridge, Tennessee, U.S.A.)*
Nuclear Fusion **1** (1961) 264—272

A particle spectrometer has been used to measure the energy distributions of neutral hydrogen atoms escaping from the 300 keV proton storage ring in DCX as the result of electron capture collisions between trapped protons and background gas molecules. A portion of the atoms were converted to protons by passage through an argon-filled gas cell, and the proton beam was then electrostatically analyzed. Energy distributions of the circulating protons were obtained by transformations applied to the measured distributions.

For both gas and carbon arc dissociation the energy distributions were strong functions of the injected H_2^+ current and the location of the region of sampling relative to the median plane. A number of curves are shown illustrating these dependences.

With arc dissociation, the circulating protons lost energy at a rate of about 20 keV/ms with 0.1 mA injected current, and at a rate twice this value when the current was increased to 2.3 mA. Most of the 20 keV/ms loss rate is believed to be due to coulumb collisions of the circulating protons with electrons in the dissociating arc. This loss rate is within a factor of two of that calculated on the basis of loss to electrons of a Maxwellian distribution, well within the accuracy of the arc parameters used in the calculation. Several mechanisms that might account for the additional energy loss rate at higher currents are suggested, but details of the origin of this loss are as yet unclear. The additional energy loss had the consequence of decreasing the mean storage time of the circulating protons.

Measurements with gas dissociation also showed an increase in the rate of energy loss with injected current. With either arc or gas dissociation, the response of the energy distributions to changes in injected H_2^+ current indicated the presence of a non-collisional dispersing mechanism which increases in importance with increases in injected current. The nature of this mechanism is not clear.

The structure of the Astron E-layer, L. TONKS *(Lawrence Radiation Laboratory, University of California, Livermore, California, U.S.A.)* Nuclear Fusion **1** (1961) 273—279

The structure of the field-reversing layer of circulating relativistic electrons which constitutes the plasma trap of the Astron has been calculated self-consistently using a model embodying the simplifying assumptions: (1) uniformity over an infinite length so that end-effects are absent, (2) uniformity of impressed field, i.e., no plasma diamagnetism, (3) dynamical friction from the trapped plasma but no scattering, (4) no radiative energy loss, (5) absence of instabilities, and (6) the structure can be initiated. Assumptions (1), (5), and (6) are the most questionable. In the model monoenergetic electrons appear uniformly on a cylindrical surface of radius r_2 with no radial velocity, all travelling at the same polar angle. The impressed magnetic field is defined by a, the radius of the helix executed in that field. The dynamical friction is defined by the constant $\nu = \beta\, \mathrm{d}\gamma/\mathrm{d}t$ where $\beta \equiv v/c \equiv (\gamma^2 - 1)^{1/2}/\gamma$ and ν is proportional to plasma density. The energy degradation is slow enough for the structure to be viewed as a steady-state ensemble with the number of electrons in any small energy-momentum interval inversely proportional to the rate of slowing down there.

In the initial-energy range defined by $10 \leq P_0 \equiv (\gamma^2 - 1)^{1/2} \leq 80$ a basic parameter is $G \equiv r_2/a$—the larger G, the tighter the electrons tend to spiral relative to the layer diameter. At any value of G greater than about 1.2, increasing the "injection rate" does indeed cause field reversal. An initial steep traversal through zero is followed by a region of slow increase—a quasi-plateau—as the electrons cease to penetrate to the axis and become confined to an ever-thinner layer lying inside r_2. This might well constitute the working region. The useful range of G appears to be from about 1.3 to 2.5 irrespective of P_0. (Beyond this the ratio of reversed-to-impressed field exceeds 0.75 and the mathematics produces physical unrealities.) For S, the "injection rate", the useful range is roughly 0.8 to 1.6 at the low G and 3.8 to 4.6 at the high. For $S = 2$ and a plasma density of electrons of 10^{15}, the electron injection rate is 0.32 mA/cm length of E-layer.

Plasma production by the trapping of energetic atoms, C. C. DAMM, A. H. FUTCH, F. GORDON, A. L. HUNT, E. C. POPP, R. F. POST, J. F. STEINHAUS *(Lawrence Radiation Laboratory, University of California, Livermore, California, U.S.A.)* Nuclear Fusion **1** (1961) 280—285

The production of a hot plasma by the injection of streams of energetic atoms into a confining magnetic field is discussed. The experiments described are directed towards injection of 20-keV hydrogen or deuterium atoms into a magnetic mirror field. The results of some numerical calculations of the plasma growth to a steady-state in a constant magnetic field are presented, including the calculation of the spatial distribution of the trapped ions. In these calculations, the primary trapping mechanism is the ionization of beam atoms by trapped ions and electrons. Parametric values are assigned to approximate the experimentally attainable conditions. The indicated equilibrium densities are in the range of 10^{14}/cm^3, at $\beta \approx 1\%$, with typical growth times of a few seconds, if the final density is determined by ion-ion scattering into the mirror loss cone.

The practical achievement of a hot plasma by this injection method depends upon maximizing the trapping rate, and minimizing the particle loss due to charge-exchange scattering. Severe requirements are therefore placed on the atomic beam intensity and the gas density in the confinement region. Some of the requirements on the build-up conditions imposed by plasma stability considerations are also discussed.

Progress toward meeting the technological requirements is described. A highly collimated beam of hydrogen atoms in excess of 5×10^{17} atoms/s at 20-keV energy has been produced. The cross-sectional area of the beam is 20 cm^2 at a distance of 360 cm from the source; the half-angle divergence is less than 10 milliradians. Vaccum techniques have been developed to achieve base pressures in the 10^{-10} mm Hg range without extensive bakeout procedure. At the same time pumping speeds exceeding 10^5 l/s for hydrogen are available.

A method of trapping the energetic atoms by means of a transient "cold" plasma is also discussed. This procedure greatly increases the initial plasma growth rate. The plasma density attainable depends upon the beam intensity, vacuum, and cold plasma density, the latter two being time-dependent. The generation of a suitable cold plasma is described.

Turbulent convection of a plasma in a magnetic field, B. B. KADOMTSEV *(I. V. Kurchatov Institute for Atomic Energy, Academy of Sciences, Moscow, U.S.S.R.)* Nuclear Fusion **1** (1961) 286—308

In this work, the known analogy between the convection instability of a normal liquid and one of the most dangerous forms of plasma instability in a magnetic field—the so-called convective, or commutation instability—is extended to include the non-linear flows arising as a consequence of instability. In the first section, the turbulent convection of a plasma in traps with magnetic mirrors and in a discharge, with a longitudinal field of moderate strength, is examined. An explanation is furnished in this way of a number of peculiarities in the behaviour of a plasma in experimental devices of this type. The second section deals with convection arising in a plasma in the presence of a longitudinal current. It is shown, that on the basis of the current convection mechanism, it is possible to explain the anomalous diffusion of plasma in a positive column.

RÉSUMÉS EN FRANÇAIS

Plasma relativiste, BEHRAM KURŞUNOĞLU *(Département de physique, Université de Miami, Coral Gables, Floride, Etats-Unis d'Amérique)* Fusion nucléaire **1** (1961) 213—223

L'auteur étudie l'équation relativiste de transport pour une fonction de distribution pour une particule. Il considère les oscillations transversales et longitudinales d'un plasma de faible densité en l'absence de champs extérieurs, sans tenir compte des collisions. Il établit les relations relativistes de dispersion et les compare aux résultats obtenus à l'aide de la théorie non relativiste.

Accélération du plasma au moyen d'un train d'ondes électromagnétiques, J. KATZENSTEIN *(Université de New Mexico, Etats-Unis d'Amérique)* Fusion nucléaire **1** (1961) 224—232

L'auteur propose un modèle d'accélérateur de plasma dans lequel le plasma est confiné dans un champ magnétique de forme cuspidée, le confinement résultant de l'action combinée du champ magnétique et du champ d'attraction équivalent dû à l'accélération. L'accélération du plasma dans le champ cuspidé est produite par une onde transitoire sur une ligne de transmission appropriée, d'impédance caractéristique constante et de vitesse de propagation croissante. Cette ligne de transmission a la forme d'un solénoïde conique dans lequel des résistances convenablement réparties maintiennent une impédance caractéristique constante. L'auteur a calculé l'ordre de grandeur du rendement de cette ligne et il a constaté qu'une ligne de 3 mètres de long, d'une impédance caractéristique de 12,6 ohms, à laquelle on applique une tension de 300 kV, peut accélérer 10^{17} deutérons jusqu'à une énergie de 50 keV. Il décrit plusieurs expériences sur le confinement des plasmas chauds au moyen d'un tel accélérateur.

Confinement et chauffage d'un plasma par un champ magnétique axial ascendant (striction orthogonale), J. W. MATHER *(Université de Californie, Laboratoire scientifique de Los Alamos, Los Alamos, New Mexico, Etats-Unis d'Amérique)* Fusion nucléaire **1** (1961) 233—256

Le chauffage et le confinement d'un plasma de deutérium par un champ magnétique axial ascendant, en géométrie cylindrique, sont étudiés en fonction de la tension, du rapport de miroir (R_m), du matériau du tube à décharge et de la forme de ce tube pour plusieurs dimensions géométriques différentes mais restant dans le rapport («aspect ratio») $D/L = 0{,}44$. Les méthodes de diagnostic comprennent l'emploi de sondes magnétiques internes et externes, la photographie ultra-rapide et les mesures du flux magnétique et des neutrons. Les sondes magnétiques révèlent l'existence de champs inversés piégés et le mélange ultérieur du plasma et du champ pendant le deuxième demi-cycle de compression et les demi-cycles suivants. Le confinement du plasma pendant le deuxième et le troisième demi-cycle de décharge est suggéré par des photographies par caméras ultra-rapides et de la durée de production des neutrons. A mesure que le rapport de miroir est ramené vers l'unité, la durée de production et la quantité de neutrons augmentent, tandis que l'écoulement terminal du plasma s'intensifie. Les asymétries azimutales du champ magnétique axial du miroir sont associées à la production des neutrons. Quand l'asymétrie azimutale est réduite á 1%, la production des neutrons est réduite des deux tiers. Les principaux effets des faibles perturbations du champ peuvent s'expliquer en fonction de la formation non-uniforme de la gaine de courant et de son détachement des parois du tube à décharge. Ce phénomène peut entraîner l'afflux d'impuretés provenant des parois, ce qui peut être la cause des faibles rendements nucléaires.

Etude paramétrique de la compression magnétique de plasmas avec pertes terminales, A. C. KOLB, W. R. FAUST, A. D. ANDERSON *(United States Naval Research Laboratory, Washington, D.C., Etats-Unis d'Amérique)* Fusion nucléaire **1** (1961) 257—263

Les auteurs ont calculé numériquement la compression adiabatique d'un plasma à collision dans des bobines finies, à une seule spire, en prenant comme paramètres la valeur initiale de β et l'état initial du plasma. Les expériences ont montré que les pertes terminales modifient profondément le caractère de la décharge. Cependant, le taux mesuré d'échauffement des électrons est très supérieur aux prévisions, ce qui laisse supposer qu'il existe un processus d'échauffement supplémentaire se rapportant probablement à la dissipation dans le plasma d'un champ magnétique inversé initialement piégé.

Distribution d'énergie des protons dans la machine DCX, C. F. BARNETT, J. L. DUNLAP, R. S. EDWARDS, G. R. HASTE, J. A. RAY, R. G. REINHARDT, W. J. SCHILL, R. M. WARNER, E. R. WELLS *(Oak Ridge National Laboratory, Oak Ridge, Tennessee, Etats-Unis d'Amérique)* Fusion nucléaire **1** (1961) 264—272

On a utilisé un spectromètre à particules pour mesurer la distribution d'énergie des atomes d'hydrogène neutre s'échappant d'un anneau de protons piégés à une énergie de 300 keV, dans la machine DCX, à la suite de collisions avec capture d'électrons entre les protons piégés et les molécules du fond gazeux. Une partie de ces atomes d'hydrogène sont ensuite transformés en protons par passage à travers une cellule gazeuse contenant de l'argon; c'est le faisceau de protons ainsi obtenu qui fait l'objet de l'analyse électrostatique. On calcule les distributions d'énergie des protons en faisant subir des transformations convenables aux distributions mesurées.

Dans le cas de la dissociation par impact gazeux comme dans le cas de la dissociation dans un arc au carbone, les distributions d'énergie sont des fonctions à variante élevée de l'intensité du courant d'ions d'hydrogène diatomique et de l'emplacement occupé par la région où se trouve l'échantillon mesuré par rapport au plan médian. Un certain nombre de courbes jointes au mémoire illustrent ces relations.

Avec la dissociation dans un arc au carbone, le taux de perte d'énergie des protons circulants est d'environ 20 keV/ms lorsque le courant d'ions injectés a une intensité de 0,1 mA; ce taux prend une valeur double lorsque l'intensité du courant du faisceau est portée à 2,3 mA. On pense que la plus grande partie du taux de perte

d'énergie (égal à 20 keV/ms) est imputable aux chocs coulombiens entre les protons circulants et les électrons de l'arc qui produit la dissociation. Cette valeur du taux de perte est inférieure au double de la valeur obtenue en calculant la perte aux électrons avec une distribution maxwellienne, soit une différence bien inférieure à la marge de précision des paramètres de l'arc utilisés dans les calculs. Les auteurs proposent plusieurs théories pour expliquer l'augmentation du taux de perte d'énergie lorsqu'on augmente l'intensité du courant, mais ajoutent que l'on ne connaît toujours pas avec précision l'origine de cette perte. La perte supplémentaire d'énergie a pour conséquence de diminuer le temps moyen de piégeage des protons circulants.
Les mesures faites en utilisant l'appareil dans lequel la dissociation est produite par impact avec les atomes d'un gaz mettent également en évidence une augmentation du taux de perte d'énergie lorsqu'on augmente l'intensité du courant injecté.

Avec les deux procédés de dissociation, la manière dont la distribution d'énergie varie avec l'intensité du courant d'ions d'hydrogène diatomique injecté révèle l'existence d'un mécanisme de dispersion sans collision dont l'importance augmente lorsqu'on augmente l'intensité du courant injecté. On ne sait pas au juste quelle est la nature de ce mécanisme.

Structure de la couche E dans la machine Astron, L. Tonks *(Université de Californie, Livermore, Californie, Etats-Unis d'Amérique)* Fusion nucléaire **1** (1961) 273—279

La structure de la couche d'électrons relativistes circulants inversant le champ, qui constitue le piège à plasma de la machine Astron a été calculée d'une manière self-consistante, à l'aide d'un modèle fondé sur les simplifications suivantes : (1) uniformité sur une longueur infinie de sorte qu'il n'y ait pas d'effets terminaux; (2) uniformité du champ magnétique appliqué, c'est-à-dire pas de diamagnétisme de plasma; (3) friction dynamique venant du plasma piégé, mais pas de diffusion; (4) aucune perte d'énergie radiative; (5) absence d'instabilités et (6) possibilité de former initialement la structure de la couche. Les hypothèses (1), (5) et (6) sont les plus contestables. Dans ce modèle, les électrons monoénergétiques arrivent d'une manière uniforme sur une surface cylindrique de rayon r_2 sans vitesse radiale et se déplacent tous sous le même angle polaire. Le champ magnétique appliqué est défini par a, rayon de l'hélice parcourue dans ce champ. La friction dynamique est définie par la constante $\nu = \beta\, \mathrm{d}\gamma/\mathrm{d}t$ où $\beta \equiv v/c \equiv (\gamma^2 - 1)^{1/2}/\gamma$ et ν est proportionnel à la densité du plasma. La décroissance de l'énergie est suffisamment lente pour que la structure puisse être considérée comme un ensemble stationnaire dont le nombre d'électrons dans n'importe quel petit intervalle énergie-quantité de mouvement est inversement proportionnel au taux du ralentissement.

Dans la gamme des énergies initiales définie par $10 \leqslant P_0 \equiv (\gamma^2 - 1)^{1/2} \leqslant 80$, $G \equiv r_2/a$ est un paramètre caractéristique — plus grande est la valeur de G, plus serrée est la spirale des électrons, par rapport au diamètre de la couche. A n'importe quelle valeur de G supérieure à 1,2, l'augmentation du «taux d'injection» provoque l'inversion du champ. Après une brusque descente passant par zéro, vient une zone d'accroissement lent — un quasi-plateau — lorsque les électrons ne pénètrent plus vers l'axe et se confinent dans une couche de plus en plus mince à l'intérieur de r_2. Il se pourrait que ce soit la région de travail effective. Le domaine utile de G semble être compris entre 1,3 et 2,5, quel que soit P_0. (Au delà, le rapport du champ inversé au champ appliqué dépasse 0,75 et les résultats mathématiques donnent lieu à des invraisemblances physiques). Pour le «taux d'injection» S, le domaine utile est compris, en gros, entre 0,8 et 1,6 pour des G peu élevés et entre 3,8 et 4,6 pour des G élevés. Pour $S = 2$ et une densité d'électrons de plasma de 10^{15}, le taux d'injection des électrons est de 0,32 mA/cm pour la couche E.

Production de plasma par le piégeage d'atomes énergétiques, C. C. Damm, A. H. Futch, F. Gordon, A. L. Hunt, E. C. Popp, R. F. Post, J. F. Steinhaus *(Université de Californie, Livermore, Californie, Etats-Unis d'Amérique)* Fusion Nucléaire **1** (1961) 280—285

Les auteurs étudient la production d'un plasma chaud par injection d'atomes énergétiques dans un champ magnétique de confinement. Les expériences décrites ont pour objet l'injection d'atomes d'hydrogène ou de deutérium de 20 keV dans un champ de miroirs magnétiques. Les auteurs présentent les résultats de quelques calculs numériques sur la croissance du plasma jusqu'à un état stationnaire, dans un champ magnétique constant, y compris le calcul d'une distribution spatiale des ions piégés. Dans ces calculs, l'ionisation d'atomes du faisceau par des ions et des électrons piégés constitue le mécanisme de piégeage primaire. On attribue des valeurs aux paramètres de manière à se rapprocher des conditions expérimentalement réalisables. Les densités d'équilibre indiquées sont de l'ordre de 10^{14}/cm^3, à $\beta \sim 1\%$ avec des temps de croissance caractéristiques de quelques secondes, si la densité finale est déterminée par des diffusions ion-ion dans le cône de perte du miroir.

La réalisation pratique d'un plasma chaud par cette méthode d'injection dépend de la possibilité de rendre maximum le taux de piégeage et minimum la perte de particules due aux diffusions par échange de charges. On impose donc des conditions sévères en ce qui concerne l'intensité du faisceau atomique et la densité de gaz dans la région de confinement. Les auteurs examinent aussi quelques-unes des conditions imposées pour des conditions de stabilité du plasma.

Ils décrivent aussi des progrès accomplis pour répondre aux exigences technologiques. Ils ont pu produire un faisceau d'atomes d'hydrogène bien collimaté de plus de 5×10^{17} atomes/s à 20 keV. La section du faisceau est de 20 cm^2 à une distance de 360 cm de la source. La moitié de l'angle de divergence est inférieure à 10 milliradians. Des techniques de vide ont été mises au point pour arriver à des pressions de l'ordre de 10^{-10} mm de mercure sans recours à des pièges plus développés. Simultanément, des vitesses de pompage dépassant 10^5 l/s pour l'hydrogène ont été réalisées.

Les auteurs examinent également une méthode pour piéger les atomes énergétiques au moyen d'un plasma «froid» transitoire. Ce procédé augmente d'une façon appréciable le taux de croissance du plasma initial. La densité de plasma réalisable dépend de l'intensité du faisceau, du vide et de la densité de plasma froid, ces deux derniers facteurs étant fonction du temps. Enfin, les auteurs décrivent la manière de produire un plasma froid approprié.

Convection turbulente du plasma dans un champ magnétique, B. B. KADOMTSEV *(Institut I. V. Kourtchatov de l'énergie atomique, Académie des sciences de l'Union soviétique, Moscou, URSS)*

Fusion nucléaire **1** (1961) 286—308

L'analogie entre l'instabilité de convection d'un liquide ordinaire et l'une des formes les plus dangereuses de l'instabilité du plasma dans un champ magnétique — instabilité dite de convection ou de commutation — est étendue aux courants non linéaires qui se forment sous l'effet de l'instabilité. Dans la première partie l'auteur examine la convection turbulente du plasma dans les pièges à bouchons magnétiques et dans une décharge à champ longitudinal d'intensité modérée. Il parvient ainsi à expliquer plusieurs particularités du comportement du plasma dans les installations expérimentales de ce genre. Dans la seconde partie il étudie la convection qui apparaît dans le plasma en présence d'un courant longitudinal. Il montre que le mécanisme d'une telle convection contribue à expliquer la diffusion «anomale» du plasma de la colonne positive.

АННОТАЦИИ НА РУССКОМ ЯЗЫКЕ

Релятивистская плазма, Б. КУРСУНОГЛУ *(Физическое отделение, университет Майами, Корал Гейблс, Флорида, США)*
Ядерный синтез **1** (1961) 213—223

Обсуждается релятивистское уравнение переноса для функции распределения одной частицы. Рассматриваются продольные и поперечные колебания плазмы низкой плотности в отсутствии внешних полей и без учета соударений. Были выведены релятивистские дисперсионные соотношения, которые сравнивались с нерелятивистской теорией.

Ускорение плазмы бегущими электромагнитными волнами, Дж. КАТЦЕНШТЕЙН *(Университет в Нью Мексико, Нью Мексико, США)*
Ядерный синтез **1** (1961) 224—232

Предлагается тип плазменного ускорителя, в котором ускоряемая плазма удерживается в магнитном поле с остроконечной геометрией, причем удержание достигается благодаря совместному действию магнитного поля и эквивалентного гравитационного поля ускорения. В поле с остроконечной геометрией плазма ускоряется проходящей волной, распространяющейся через соответствующую линию передачи с постоянным значением характеристического импеданса и возрастающей скоростью распространения. Такая линия передачи имеет форму соответствующим образом нагруженного сужающегося соленоида с распределенной емкостью для сохранения постоянного характеристического импеданса. Проведено вычисление порядка величин рабочего режима такой линии и обнаружено, что линия длиной 3 метра с характеристическим импедансом 12,6 ома при напряжении на ней 300 кв может ускорить 10^{17} дейтеронов до энергии 50 кэв. Дается описание нескольких возможных экспериментов по удержанию горячей плазмы с использованием такого ускорителя.

Исследования удержания и нагрева плазмы в нарастающем аксиальном магнитном поле (Ортогональный пинч), Дж. У. МАТЕР *(Калифорнийский университет, Лос Аламосская научная лаборатория, Лос Аламос, Нью Мексико, США)*
Ядерный синтез **1** (1961) 233—256

Нагрев и удержание дейтериевой плазмы нарастающим аксиальным магнитным полем в цилиндрической геометрии исследуется в зависимости от напряжения, коэффициента отражения (R_m), материала разрядной трубки и формы трубки для нескольких разномасштабных геометрий при заданном отношении диаметра катушки к ее длине $D/L = 0{,}44$. Методы исследования включают внутренние и внешние магнитные зонды, сверхскоростную фоторазвертку и измерения магнитного потока и нейтронов. Измерения с магнитными зондами указывают на наличие захваченных обратных полей и последующее перемешивание плазмы и поля во время второго полупериода и последующих полупериодов сжатия. Изоляция плазмы от стенок во время второго и третьего полупериода разрядного цикла выводится на основании сверхскоростной фоторазвертки и из продолжительности выхода нейтронов. Так как коэффициент отражения уменьшается до ~ 1, то возрастает выход и продолжительность образования нейтронов при одновременном увеличении утечки плазмы на концах. Азимутальная асимметрия в пробочном аксиальном поле B_z связана с выходом нейтрона. Уменьшение азимутальной асимметрии до $\sim 1\,\%$ уменьшает выход нейтронов примерно в три раза. Основные эффекты небольших возмущений поля могут быть объяснены неоднородностью образования и отрыва токовой оболочки от стенки разрядной трубки. Это может привести к поступлению примесей со стенок, что может объяснить уменьшение ядерного выхода.

Параметрическое изучение магнитного сжатия плазм с потерями на концах, А. К. КОЛБ, В. Р. ФОСТ, А. Д. АНДЕРСОН *(Исследовательская лаборатория ВМФ США, Вашингтон, США)*
Ядерный синтез **1** (1961) 257—263

Проводились численные расчеты адиабатического сжатия плазмы, в которой преобладают соударения, находящейся в конечных одновитковых катушках с использованием начальных значений β начальных состояний плазмы в качестве параметров. Эксперимент показал, что потери на концах оказывают сильное влияние на характер разряда. Однако измеренная скорость нагрева электронов намного выше предсказанной, что указывает на существование дополнительного механизма нагрева, который, по-видимому, находится в связи с рассеянием первоначально захваченного обратного магнитного поля в плазме.

Распределение протонов по энергии в установке DCX, С. Ф. БАРНЕТ, Дж. Л. ДАНЛЕП, Р. С. ЭДВАРДС, Г. Р. ХЕЙСТ, Дж. А. РЭЙ, Р. Г. РЕЙНХАРДТ, У. Дж. ШИЛЛ, Р. М. УОРНЕР, Е. Р. УЭЛЛС *(Окриджская национальная лаборатория, Окридж, Теннесси, США)*
Ядерный синтез **1** (1961) 264—272

Спектрометр частиц использовался для измерения энергетического распределения нейтральных атомов водорода из накопительного кольца установки DCX, содержащего протоны с энергией 300 кэв, вылетающих за счет соударений с захватом электронов, происходящих между захваченными протонами и молекулами остаточного газа. Часть атомов превращалась в протоны при прохождении через газовую камеру, заполненную аргоном, после чего пучок протонов анализировался электростатическим способом. Энергетическое распределение вращающихся протонов в кольце было получено путем преобразования измеренного распределения.

Энергетическое распределение как для диссоциации в газе, так и для диссоциации на угольной дуге находится в большой зависимости от тока инжектированных H_2^+ и места отбора проб относительно средней плоскости. Показан ряд кривых, иллюстрирующих эти зависимости.

При диссоциации на дуге скорость потери энергии вращающихся в кольце протонов составляет примерно 20 кэв/миллисекунду при инжектируемом токе 0,1 миллиампера и вдвое больше при увеличении тока до 2,3 миллиампера. Большая часть этой потери энергии, как полагают, обусловлена кулоновскими столкновениями вращающихся протонов с электронами в диссоциирующей дуге. Эта скорость потери энергии не более чем в два раза отличается от рассчитанной на основе потери на электроны с максвелловским распределением и полностью находится в пределах точности параметров дуги, использованных при расчетах. Предложены некоторые механизмы, которые могут объяснить дополнительную скорость потери энергии при больших значениях силы тока, но причины появления этих потерь все еще не ясны. Дополнительные потери энергии приводят к уменьшению среднего времени удержания протонов в накопительном кольце.

Измерения диссоциации на газе показали также возрастание скорости потери энергии с увеличением тока инжекции. При диссоциации как на газе, так и на дуге результирующее энергетическое распределение в зависимости от тока инжектируемых H_2^+ указывало на наличие механизма рассеяния энергии без соударений, роль которого возрастает с увеличением инжектируемого тока. Природа этого механизма является неясной.

Структура E-слоя в «Астроне», Л. ТОНКС *(Радиационная лаборатория им. Лоуренса Калифорнийского университета, Ливермор, шт. Калифорния, США)* Ядерный синтез **1** (1961) 273—279

Выполнен самосогласованный расчет структуры слоя циркулирующих релятивистских электронов, изменяющих направление магнитного поля и создающих условия для захвата плазмы в установке «Астрон» на основе модели, включающей следующие упрощающие предположения: (1) однородность по всей длине вплоть до бесконечности, так что при этом отсутствуют концевые эффекты; (2) однородность приложенного поля, т.е. отсутствие диамагнетизма в плазме; (3) наличие динамического трения, связанного с захваченной плазмой, но отсутствие рассеяния; (4) отсутствие потерь энергии на излучение; (5) отсутствие неустойчивостей; (6) возможность первоначального создания структуры. Предположения (1), (5) и (6) являются наиболее сомнительными. Для данной модели считается, что моноэнергетические электроны имеют однородное распределение на цилиндрической поверхности радиуса r_2, обладают нулевой радиальной скоростью и все двигаются под одним и тем же полярным углом. Приложенное магнитное поле определяется радиусом спирали a, соответствующим данному полю. Динамическое трение определяется как константа $\nu = \beta\, \mathrm{d}\gamma/\mathrm{d}t$, где $\beta \equiv v/c \equiv (\gamma^2 - 1)^{1/2}/\gamma$ и ν пропорционально плотности плазмы. Уменьшение энергии происходит достаточно медленно для того, чтобы можно было рассматривать структуру как установившийся или квазистационарный ансамбль, состоящий из ряда электронов с любым малым интервалом энергий и импульсов, обратно пропорциональным скорости уменьшения энергии в этом интервале.

В области начальных энергий, определяемых как $10 \leq P_0 \equiv (\gamma^2 - 1)^{1/2} \leq 80$, основной параметр есть $G = r_2/a$. Наибольшее значение G соответствует наиболее близкому расположению электронов, которые стремятся двигаться по спирали с диаметром, равным диаметру слоя. При любом значении параметра G, большем приблизительно 1,2, имеет место возрастание «скорости инжекции», приводящее к появлению обратного поля. За областью медленного нарастания — квазиплато — следует первоначальное крутое прохождение через ноль, когда электроны перестают достигать оси и начинают удерживаться в сверхтонком слое, лежащем внутри r_2. Этот слой может считаться хорошо сформированной рабочей областью. Повидимому, область пригодных значений G заключена приблизительно от 1,3 до 2,5 независимо от значений P_0. (Вне пределов этой области отношение обратного поля к приложенному превышает величину 0,75 и математические расчеты приводят к физически нереальному случаю.) Для величины S — «скорость инжекции» область пригодных значений грубо заключена между 0,8 и 1,6 при малых значениях G и между 3,8 и 4,6 — при больших. Для $S = 2$ и плотности электронов в плазме 10^{15}, скорость инжекции электронов равняется 0,32 ма/см длины E-слоя.

Получение плазмы с помощью захвата быстрых атомов, С. С. ДАММ, А. Х. ФУТЧ, Ф. ГОРДОН, А. Л. ХАНТ, Е. С. ПОПП, Р. Ф. ПОСТ и ДЖ. Ф. СТЕЙНХАУС *(Радиационная лаборатория им. Лоуренса, Калифорнийский университет, Калифорния, США)* Ядерный синтез **1** (1961) 280—285

В докладе обсуждается получение горячей плазмы путем инжекции потока быстрых атомов в удерживающее магнитное поле. Описанные эксперименты имели целью инжектирование водородных или дейтериевых атомов с энергией 20 кэв в ловушку с магнитными пробками. Представлены результаты некоторых численных расчетов по накоплению плазмы до стабильного состояния в постоянном магнитном поле, включая расчет пространственного распределения захваченных ионов. Согласно этим расчетам, основным механизмом захвата является ионизация атомов пучка захваченными ионами и электронами.

Параметрам приписываются значения, приближающиеся к экспериментально полученным условиям. Указанные равновесные плотности находятся в диапазоне 10^{14} см$^{-3}$ при $\beta \sim 1\%$ с типичным временем нарастания, равным нескольким секундам, если конечная плотность определяется рассеянием ионов на ионах и попаданием в конус потерь. Практическое получение горячей плазмы при таком методе инжекции зависит от максимального увеличения скорости захвата и уменьшения потерь частиц, обусловливаемых рассеянием вследствие перезарядки. Поэтому предъявляются требования к интенсивности атомного пучка и плотности газа в области удержания. Рассматриваются также некоторые требования к условиям накопления, которые диктуются соображениями устойчивости плазмы.
Описаны успехи в выполнении технологических требований. Получен хорошо сколлимированный пучок атомов водорода (более $5 \cdot 10^{17}$ атомов/сек) при энергии 20 кэв. Площадь сечения пучка составила 20 см^2 на расстоянии 360 см от источника: значение половинного угла расхождения менее 10 мрад. Разработана технология получения вакуума, которая позволила достичь начального давления 10^{-10} мм рт. ст. без применения прогрева системы. В то же время скорость откачки превышала 10^5 л/сек для водорода.

Рассматривается также метод захвата быстрых атомов при помощи проходящей «холодной плазмы». Этот метод значительно увеличивает первоначальную скорость накопления плазмы. Достигаемая плотность плазмы зависит от интенсивности пучка, вакуума и плотности холодной плазмы, а две последние величины зависят от времени. Описаны способы получения соответствующей холодной плазмы.

Турбулентная конвекция плазмы в магнитном поле, Б. Б. КАДОМЦЕВ *(Институт атомной энергии им. И. В. Курчатова Академии Наук СССР, Москва, СССР)* Ядерный синтез **1** (1961) 286—308

В настоящей работе известная аналогия между конвекционной неустойчивостью обычной жидкости и одним из наиболее опасных видов неустойчивости плазмы в магнитном поле — так называемой конвективной, или перестановочной, распространяется на нелинейные течения, возникающие вследствие неустойчивости. В первой части работы рассматривается турбулентная конвекция плазмы в ловушках с магнитными пробками и в разряде с умеренным продольным полем. На этом пути удается объяснить ряд особенностей поведения плазмы в экспериментальных устройствах такого типа. Во второй части рассматривается конвекция, возникающая в плазме при наличии продольного тока. Показано, что на основе механизма токовой конвекции можно объяснить «аномальную» диффузию плазмы положительного столба.

RESÚMENES EN ESPAÑOL

Sobre un plasma relativista, B. KURŞUNOĞLU *(Departamento de Física, Universidad de Miami, Coral Gables, Florida, Estados Unidos)* Fusión Nuclear **1** (1961) 213—223

El autor examina la ecuación relativista del transporte para una función de distribución de una sola partícula. Considera las oscilaciones transversales y longitudinales de un plasma de baja densidad, sin campos externos, despreciando las colisiones. Deduce relaciones de dispersión relativista y las compara con las establecidas mediante la teoría no relativista.

Aceleración de un plasma mediante ondas electromagnéticas progresivas, J. KATZENSTEIN *(Universidad de Nuevo México, Nuevo México, Estados Unidos)* Fusión Nuclear **1** (1961) 224—232

El autor propone un tipo de acelerador de plasma en el cual el plasma se encuentra confinado en un campo magnético en forma de cúspide aceleradora; el confinamiento se obtiene por la acción combinada del campo magnético y del campo gravitatorio equivalente de la aceleración. La cúspide aceleradora se origina por el efecto que ejerce una onda transitoria sobre una línea de transmisión adecuada, de impedancia característica constante y creciente velocidad de propagación. La línea de transmisión tiene forma de solenoide cónico, cargado en forma apropiada con una capacitancia distribuida de modo que se conserve constante la impedancia característica. El autor calcula aproximadamente el rendimiento de dicha línea, buscando su orden de magnitud, y llega a la conclusión de que una línea de 3 metros de largo, con una impedancia característica de 12,6 Ω, a una tensión de 300 kV, es capaz de acelerar 10^{17} deuterones hasta una energía de 50 keV. Se describen después varios experimentos sobre confinamiento de plasmas calientes que se pueden realizar con el acelerador mencionado.

Diagnósticos del confinamiento y la calefacción de un plasma por un campo magnético axial creciente (Construcción ortogonal), J. W. MATHER *(Universidad de California, Los Alamos, Nuevo México, Estados Unidos)* Fusión Nuclear **1** (1961) 233—256

La memoria investiga la calefacción y el confinamiento de un plasma de deuterio por un campo magnético axial creciente en una geometría cilíndrica, en función del voltaje aplicado, de la proporción de espejo (R_m), y del material y la forma del tubo de descarga, para diversas geometrías de parámetros dimensionales variantes a una relación dimensional dada diámetro/longitud = 0,44. Como métodos de diagnóstico se emplean sondas magnéticas internas y externas, fotografía con cámara rápida de rendija y mediciones del flujo magnético y de los neutrones. Las sondas magnéticas muestran la existencia de campos inversos capturados y la mezcla subsiguiente del plasma y del campo durante el segundo semiciclo y los ciclos de compresión posteriores. De las fotografías con cámara rápida de rendija y de la duración de la producción de neutrones se deduce el confinamiento del plasma durante el segundo y tercer ciclo de semidescarga. Al reducir la proporción de reflexión hasta ~1, el rendimiento y la duración de la producción de neutrones aumenta, mientras que el escape de plasma en los extremos se acentúa. Las asimetrías azimutales del campo magnético axial del espejo se hallan asociatas a la producción de neutrones. Cuando la asimetría azimutal se reduce a 1%, la producción de neutrones disminuye de dos tercios. Los defectos principales de las pequeñas perturbaciones del campo se pueden explicar en términos de la formación no uniforme de la lámina de corriente y de su desprendimiento de las paredes del tubo de descarga. Esto puede hacer que las impurezas de la pared ejerzan una influencia que puede traducirse en la disminución de los rendimientos nucleares.

Estudio paramétrico de la compresión magnética de plasmas con pérdidas en los extremos, A. C. KOLB, W.R. FAUST, A.D. ANDERSON *(United States Naval Research Laboratory, Washington, D.C., Estados Unidos)* Fusión Nuclear **1** (1961) 257—263

Los autores han llevado a cabo cálculos numéricos de la compresión adiabática de un plasma de colisiones predominantes, en bobinas finitas, de una sola espira, utilizando como parámetros el valor β y el estado del plasma iniciales. De la observación experimental se deduce que las pérdidas en los extremos determinan acusadamente el carácter de la descarga. Sin embargo, la intensidad del calentamiento electrónico medida directamente es mucho mayor que la prevista, lo que induce a creer que actúa un mecanismo de recalentamiento adicional, que quizás consista en la disipación de un campo magnético inverso inicialmente encerrado en el plasma.

Distribución de la energía de los protones en el aparato DCX, C. F. BARNETT, J. L. DUNLAP, R. S. EDWARDS, G. R. HASTE, J. A. RAY, R. G. REINHARDT. W. J. SCHILL, R. M. WARNER, E. R. WELLS *(Oak Ridge National Laboratory, Oak Ridge, Tennessee, Estados Unidos)* Fusión Nuclear **1** (1961) 264—272

Los autores han empleado un espectrómetro de partículas para medir las distribuciones de la energía de los átomos neutros de hidrógeno que escapan del anillo de almacenamiento de protones de 300 keV del aparato DCX a consecuencia de las colisiones de captura electrónica entre protones capturados y las moléculas del gas ambiente. Una parte de los átomos fue convertida en protones haciéndolos pasar a través de una célula gaseosa llena de argón, después de lo cual se hizo un análisis electrostático del haz de protones. Las distribuciones de la energía de los protones circulantes se obtuvieron mediante transformaciones aplicadas a las distribuciones medidas. Las distribuciones de la energía, para la disociación por gas o por arco de carbono, demostraron ser funciones fuertes de la corriente de H_2^+ inyectada y de la situación de la zona de muestreo respecto del plano medio. La memoria muestra algunas curvas que hacen patentes estas relaciones.

En el caso de la disociación al arco, los protones circulantes pierden energía a la velocidad de unos 20 keV/ms para una corriente inyectada de 0,1 mA, y al doble de velocidad si aumenta la corriente hasta 2,3 mA. Se cree que la mayor parte de la pérdida de velocidad de 20 keV/ms se debe a colisiones culómbicas entre los protones y los electrones del arco disociante. Esta velocidad de pérdida concuerda, con un margen de aproximación de 2, con la calculada basándose en la pérdida debida a electrones de distribución maxwelliana, y queda perfectamente dentro de los márgenes de exactitud de los parámetros del arco empleados en el cálculo. Los autores sugieren varios mecanismos que podrían explicar el aumento de la velocidad de pérdida de energía para corrientes más elevadas, pero los detalles de su origen no están claros todavía. La consecuencia de esta pérdida adicional de energía es una disminución del tiempo medio de almacenamiento de los protones circulantes.

Las mediciones efectuadas con disociación por gas mostraron también un aumento de la velocidad de pérdida de la energía al aumentar la corriente inyectada.

Tanto en el caso de la disociación por arco como por gas, la respuesta de las distribuciones de energía a las alteraciones de la corriente de H_2^+ inyectado indican la presencia de un mecanismo de dispersión independiente de las colisiones, cuya influencia aumenta con la corriente inyectada. Todavía no se ha aclarado la naturaleza de este mecanismo.

La estructura de la capa E del Astron, L. TONKS *(Universidad de California, Livermore, California, Estados Unidos)*
Fusión Nuclear **1** (1961) 273—279

Se ha calculado autoconsistemente la estructura de la capa del campo inversor de electrones relativistas circulantes, capa que consistuye la trampa de plasma del Astron, usando un modelo que implica las suposiciones simplificadoras: (1) Uniformidad en una longitud infinita, de modo que hay ausencia de efectos de borde, (2) uniformidad del campo utilizado, esto es, plasma no diamagnético, (3) fricción dinámica del plasma confinado, pero no dispersión, (4) ausencia de pérdidas de energía radiante, (5) ausencia de inestabilidades, y (6) posibilidad de iniciar la estructura. Las suposiciones (1), (5) y (6) son las más discutibles. En el modelo, los electrones monoenergéticos aparecen uniformemente sin velocidad radial sobre una superficie cilíndrica de radio r_2, y todos se desplazan en el mismo ángulo polar. El campo magnético aplicado se define por a, radio de la hélice descrita en dicho campo. La fricción dinámica se define por la constante $\nu = \beta\, \mathrm{d}\gamma/\mathrm{d}t$ donde $\beta = v/c = (\gamma^2 - 1)^{1/2}/\gamma$ y ν es proporcional a la densidad del plasma. La degradación energética es lo suficientemente lenta para considerar la estructura como un conjunto estacionario donde el número de electrones en cada pequeño intervalo, energía-momento, es inversamente proporcional a la velocidad de moderación en el intervalo considerado.

En el intervalo de energías iniciales definido por $10 \leqslant P_0 \equiv (\gamma^2 - 1)^{1/2} \leqslant 80$, $G = r_2/a$ es un parámetro básico; cuanto mayor es G, tanto más apretadamente los electrones tienden a describir espirales en relación al diámetro de la capa. Para cualquier valor de G superior a 1,2 el aumento de "la velocidad de inyección" produce inversión del campo. Un salto inicial que se pase a través de cero es seguido por una zona de aumento lento —casi una meseta— a medida que los electrones dejan de penetrar hasta el eje y resultan confinados a una capa cada vez más delgada situada dentro de r_2. Esta podría ser la región de trabajo. Se observa que el rango útil de G es aproximadamente de 1,3 a 2,5, independientemente de P_0. (Más allá de este valor, la relación de campo invertido a campo aplicado supera a 0,75 y el tratamiento matemático da resultados sin significado físico). El intervalo útil de S, "velocidad de inyección", es aproximadamente de 0,8 a 1,6 para los valores bajos de G, y de 3,8 a 4,6 para los altos. Para $S = 2$ y una densidad de plasma de electrones de 10^{15}, la velocidad de inyección de electrones es de 0,32 mA por centímetro de longitud de la capa E.

Producción de plasma por captura de átomos energéticos, C. C. DAMM, A. H. FUTCH, F. GORDON, A. L. HUNT, E. C. POPP, R. F. POST, J. F. STEINHAUS *(Universidad de California, Livermore, California, Estados Unidos)*
Fusión Nuclear **1** (1961) 280—285

Se estudia la producción de un plasma caliente por inyección de corrientes de átomos energéticos en un campo magnético de confinamiento. Los experimentos descritos tienen por objeto conseguir la inyección de átomos de hidrógeno o deuterio de 20 keV en un campo de espejos magnéticos. Se presentan los resultados de algunos cálculos numéricos acerca de la evolución del plasma hacia un estado estacionario en un campo magnético constante, incluyendo el cálculo de la distribución espacial de los iones capturados. En estos cálculos, el mecanismo de captura principal es la ionización de los átomos del haz por los iones y electrones capturados. Se fijan valores paramétricos para aproximarse a las condiciones que pueden realizarse experimentalmente. Las densidades de equilibrio indicadas son del orden de 10^{14}/cm^3, con $\beta \approx 1\%$ y con tiempos de crecimiento típicos de unos pocos segundos, si la densidad final viene determinada por una dispersión ion-ion dentro del cono de pérdidas de espejo.

La realización práctica por este método de inyección de un plasma caliente depende de la posibilidad de aumentar al máximo la velocidad de captura y reducir al mínimo las pérdidas de partículas debidas a una dispersión por intercambio de carga. Se imponen por tanto severos requisitos en la región de confinamiento para la intensidad del haz de átomos y la densidad del gas. Algunos de los requisitos impuestos en las condiciones de crecimiento por consideraciones sobre la estabilidad del plasma también se discuten.

Se describen los progresos realizados con miras a satisfacer exigencias técnicas. Se ha producido un haz fuertemente colimado de átomos de hidrógeno a 20 keV, a razón de más 5×10^{17} átomos/s. El área de la sección transversal del haz es de 20 cm^2 a una distancia de 360 cm de la fuente; el semi-ángulo de divergencia es menor de 10 milirradianes. La técnica de vacío ha sido desarrollada para lograr presiones bajas del orden de 10^{-10} mm de Hg sin grandes procesos de desgasificación. Al mismo tiempo se obtienen velocidades de bombeo por encima de 10^5 l/s para el hidrógeno.

Se discute también un método de captura de los átomos energéticos por medio de un plasma "frío" transitorio. Este procedimiento aumenta grandemente la velocidad inicial de crecimiento del plasma. La densidad del plasma obtenible depende de la intensidad del haz, del vacío y de la densidad del plasma frío, siendo los dos últimos funciones del tiempo. Se describe la producción de un plasma frío adecuado.

Convección turbulenta del plasma en un campo magnético, B. B. KADOMTSEV *(Instituto de Energía Atómica I. V. Kurchatov, Academia de Ciencias de la Unión Soviética, Moscú, Unión de Repúblicas Socialistas Soviéticas)*
Fusión Nuclear **1** (1961) 286—308

En la presente memoria el autor extiende a los movimientos no lineales originados por inestabilidades, la conocida analogía entre la inestabilidad por convección en un líquido usual y una de las manifestaciones más peligrosas de la inestabilidad de un plasma en un campo magnético, que es la llamada inestabilidad convectiva o por inversión. En la primera parte del trabajo se examina la convección turbulenta de los plasmas en las trampas de espejo magnético y en las descargas con campo longitudinal de mediana intensidad y se explican una serie de peculiaridades en el comportamiento del plasma en los aparatos experimentales de este tipo. En la segunda parte se estudian los fenómenos de convección que se manifiestan en un plasma en presencia de una corriente longitudinal y se demuestra que, basándose en el mecanismo de la convección de la corriente, es posible explicar la difusión "anómala" del plasma de la columna positiva.

Page 140 Table I: The values of $(2\pi/\lambda)\, a\tau^2$ for examples 6, 7, 4a and 8a should read 7.7, 4.5, 0.56 and 14.3, respectively. All examples in Tables I and II refer to the mirror coil except 6, 6a, 7, 7a, 8, 8a.

Page 142 The first two sentences of Section 5.1 should read: "Tables I and II show seven examples (1, 4, 5, 4a, 3b, 9b, 10b) for which $(2\pi/\lambda)\, a\tau^2 \simeq 1$ within the limit of the experimental error, which was calculated to be as much as a factor 2 in some cases. During the implosion and oscillation phases there are no examples with $(2\pi/\lambda)\, a\tau^2 \ll 1$ and four examples with $(2\pi/\lambda)\, a\tau^2 \gg 1$."
In Section 5.2, line 2 should read $\lambda \propto T_1^{5/3}\, n^{-2/3}$.

AUTHOR INDEX

Numbers refer to initial page of article. Numbers in brackets refer to location of errata or addenda.

ANDERSON, A. D. 257
AONO, O. 181
BARNETT, C. F. 264
BERNSTEIN, I. B. 3, (153)
BODIN, H. A. B. 54, 139, (322)
CANOBBIO, E. 172
COTSAFTIS, M. 121
DAMM, C. C. 280
DE BORDE, A. H. 160
DUNGEY, J. W. 312
DUNLAP, J. L. 264
EDWARDS R. S. 264
FAUST, W. R. 62, (153), 257
FILIPPOV, N. V. 195
FILIPPOVA, T. I. 195
FUTCH, A. H. 280
GORDON, F. 280
GREEN, H. S. 69
GREEN, T. S. 42
HAAS, F. A. 160
HARRIS, E. G. 62
HASTE, G. R. 264
HUNT, A. L. 280
JAGGI, R. K. 198
KADOMTSEV, B. B. 286
KATZENSTEIN, J. 224
KIHARA, T. 181
KOLB, A. C. 257
KURSUNOGLU, B. 213
LEGATOWICZ, A. 155
LEHNERT, B. 125
LINHART, J. G. 78, (211)
LINLOR, W. I. 309
MACKIN, R. J. JR. 131, (211)
MATHER, J. W. 233
MERCIER, C. 47, 121
NEWTON, A. A. 54, 139, (322)
NIBLETT, G. B. F. 42
PEACOCK, N. J. 54, 139, (322)
PISTUNOVICH, V. I. 189
POPP, E. C. 280
POST, R. F. 280
RAY, J. A. 264
REINHARDT, R. G. 264
ROSTOKER, N. 101
SAGDEEV, R. Z. 82
SCHILL, W. J. 264
SHAFRANOV, V. D. 189
STEINHAUS, J. F. 280
SUGIHARA, R. 181
TONKS, L. 273
TREHAN. S. K. 3, (153)
TUCK, J. L. 201
VEDENOV, A. A. 82
VELIKHOV, E. P. 82
VINOGRADOV, V. P. 195
WARNER, R. M. 264
WELLS, E. R. 264
YOSHIKAWA, M. 167
ZHURIN, V. V. 195

Transliteration index

Веденов, А. А. . . . . VEDENOV, A. A.
Велихов, Е. П. . . . . VELIKHOV, E. P.
Виноградов, В. П. . . . . VINOGRADOV, V. P.
Журин, В. В. . . . . ZHURIN, V. V.
Кадомцев, Б. Б. . . . . KADOMTSEV, B. B.
Пистунович, В. И. . . . . PISTUNOVICH, V. I.
Сагдеев, Р. З. . . . . SAGDEEV, R. Z.
Филиппов, Н. В. . . . . FILIPPOV, N. V.
Филиппова, Т. И. . . . . FILIPPOVA, T. I.
Шафранов, В. Д. . . . . SHAFRANOV, V. D.